Вступительный экзамен в 8-ой класс.

1. Сумма 20 натуральных чисел равна 2018. Найдите наименьшее возможное значение суммы цифр всех этих 20 чисел.

(2 балла)

<u>Ответ: 20. Решение.</u> 2018 = 1000 + 1000 + 1 + …+1 (18 единиц). Меньше 20 сумма, очевидно, быть не может.

2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{12}, \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{7}{12}. \end{cases}$$

В ответе укажите значение выражения $\boldsymbol{x + 2y + 3z}$.

(3 балла)

<u>Ответ: 27. Решение.</u> Сложим все уравнения системы, получим: $2 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{3}{2}$. Значит $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{4}$. Из первого уравнения системы получаем $\frac{1}{z} = \frac{1}{4}$, $z = 4$. Из второго $\frac{1}{x} = \frac{1}{3}$, $x = 3$. Из третьего $\frac{1}{y} = \frac{1}{6}$, $y = 6$. Подставляя, полученные значения переменных в выражение $\boldsymbol{x + 2y + 3z}$, находим его значение равное 27.

3. Для ненулевых чисел $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ выполняется равенство $a + \frac{b}{c} = b + \frac{c}{a} = c + \frac{a}{b} = 1$. Какие значения может принимать выражение $\boldsymbol{ab + bc + ca}$?

(3 балла)

<u>Решение.</u> Рассмотрим по отдельности равенства $a + \frac{b}{c} = 1$, $b + \frac{c}{a} = 1$, $c + \frac{a}{b} = 1$. Умножим обе части первого равенства на $\boldsymbol{c}$, получаем такое выражение $\boldsymbol{ac + b = c}$, откуда следует $\boldsymbol{ac = c - b}$. Сделаем аналогичные операции с остальными равенствами, получим: $\boldsymbol{ba = a - c}$, $\boldsymbol{cb = b - a}$. Подставим полученные выражения в

$$\boldsymbol{ab + bc + ca = (a - c) + (b - a) + (c - b) = a - c + b - a + c - b = 0.}$$

4. В равнобедренном треугольнике ABC с углом BAC, равном 100°, проведена биссектриса BS. Докажите, что AS + SB = BC.

(5 баллов)

Решение. Отложим на стороне BC от вершины B отрезок BP равный BS. Тогда треугольник BSP – равнобедренный, с углом при вершине SBP равным 20°. Тогда в треугольнике SPC угол SPC равен 100°, а угол PSC равен 180° - 60° - 80° = 40°. Тогда угол SCP тоже равен 40°. Значит, треугольник SCP – равнобедренный, т.е. SP = PC. Опустим из вершины S перпендикуляр SK на BP. Отложим отрезок KP_1 на KB равный отрезку KP. Треугольник P_1SP – равнобедренный с углом при вершине, равным 20°. Получается, что угол BSP_1 равен 60°. Треугольники BSP_1 и ABS равны по стороне и двум прилежащим к ней углам (BS – общая, $\angle BSP_1 = \angle BSA$, $\angle SBP_1 = \angle SBA$). Тогда имеем, что AS = SP_1 = SP = PC и BS = BP. Следовательно, AS + SB = CP + PB = BC.

Что требовалось доказать.

5. По краю, вокруг квадратной площади через каждые 10 метров стоят столбы, причём в каждом углу площади стоит столб. Когда попробовали повесить на каждый столб по 4 фонаря, 5 фонарей осталось лишних. Тогда фонари повесили так, чтобы на каждой стороне квадрата было по 18 фонарей (ни один столб не остался без фонаря). Найдите длину одного края стороны данной площади и общее количество фонарей.

(5 баллов)

Решение. 1). Пусть на каждой стороне квадрата стоит x столбов, тогда общее их количество равно $2x+2(x-2)=4x-4$. Из первого варианта распределения фонарей следует, что число фонарей равно $4(4x-4)+5=16x-11$. Поскольку затем развесили по 18 фонарей на каждой стороне, то общее число фонарей не превосходит 72. Но, фонари в вершинах, при этом посчитаны дважды, поэтому общее число фонарей не превосходит 68 (так как в вершинах висит хотя бы один фонарь). Значит, можно оценить число столбов: $16x-11 \leq 68$, $x \leq 79/16$, следовательно, $x \leq 4$. Кроме того, известно, что в каждом углу стоит по столбу, т.е. x *(количество столбов, стоящих на одной стороне)* равно либо 2, либо 3, либо 4 (т.е. нет стороны, где стоит ровно один столб).

2) Рассмотрим случай $\underline{x = 2}$, т.е. имеется всего 4 столба в вершинах квадрата. При этом число фонарей равно $16x-11=21$. С другой стороны, т.к. на каждой стороне стало по 18 фонарей, то их всего должно быть 36. Противоречие.

3) Пусть ***x = 3***, т.е. всего 8 столбов: 4 столба в вершинах и по одному в середине каждой стороны. При этом число фонарей равно 37. Если на каждой стороне по 18, то на южной и северной вместе 36 и еще осталось два столба (на восточной и западной сторонах) – всего должно быть не менее 38 фонарей. Противоречие.
4) Пусть ***x = 4***, т.е. всего 53 фонаря. Развесить их по столбам, чтобы на каждой стороне было по 18, можно, например, так: начиная с некоторой вершины ставим по часовой стрелке 1-7-7-3-1-2-12-1-2-3-7-7. При этом длина стороны квадрата 30 м. **Ответ: 30 метров, 53 фонаря.**

(*Математическая олимпиада ОмГУ имени профессора Г.П. Кукина, 2012)*