ГАОУ ТО «Физико-математическая школа»

Вступительный экзамен в 8 класс 2020 г.

1. В первом сосуде есть некоторое количество 40%-ого раствора кислоты, а во втором сосуде в два раза большее количество 34%-ого раствора той же кислоты. Из каждого сосуда отлили какое-то количество раствора в отдельные колбы и затем перелили их содержимое в другой сосуд (то, что отлили из первого сосуда, перелили во второй и наоборот), причем из первого сосуда отлили 50 гр раствора, а из второго в два раза больше. Определить процентное содержание кислоты в каждом из сосудов после переливания, если дополнительно известно, что при смешивании двух данных растворов (до переливания) получается 1200 гр раствора кислоты. (3 балла)

   Решение:
   Нетрудно определить, что в первом сосуде 400 гр кислоты, а во втором – 800гр. Составим таблицу:

	Масса смеси (гр)	Масса чистого вещества (гр)	Концентрация (%)
1 сосуд	400	160	40
2 сосуд	800	272	34
Смесь растворов	1200	432	36

   Теперь, зная массу каждого раствора и массу, содержащейся в нем кислоты, перейдем ко второй части задачи – переливанию.
   Для определения процентного содержания кислоты в растворе, требуется знать массу раствора и массу чистой кислоты.

Оформим промежуточные результаты в таблицы:

То, что переливаем	Масса смеси (гр)	Масса чистого вещества (гр)	Концентрация (%)
1 раствор	50	20	40
2 раствор	100	34	34

То, что стало после переливания	Масса смеси (гр)	Масса чистого вещества (гр)	Концентрация (%)
1 сосуд	400-50+100=450	160-20+34=174	$\frac{174}{450}\cdot 100\% = 38\frac{2}{3}\%$
2 сосуд	800-100+50=750	272-34+20=258	$\frac{258}{750}\cdot 100\% = 34{,}4\%$

Ответ: $\mathbf{38\frac{2}{3}}\%$ **и** $\mathbf{34,4}\%$

2. **Решить уравнение**

$$\big||2b-3a+5|+|16-b^2|\big| = 0.$$ (3 балла)

Решение:

Заметим, что $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ и

$|x| + |y| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Тогда данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 2b - 3a + 5 = 0 \\ 16 - b^2 = 0 \end{cases}$$

Решим ее:

$$\begin{cases} 2b - 3a + 5 = 0 \\ 16 - b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b - 3a + 5 = 0 \\ \left[\begin{array}{l} b = 4 \\ b = -4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = 4 \\ a = 13/3 \end{cases} \\ \begin{cases} b = -4 \\ a = -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\mathbf{\frac{13}{3}; 4}\right)$ и $(\mathbf{-1};\ \mathbf{-4})$**.**

3. **Постройте график функции**

$$y = \frac{x^2-1}{|x-1|} + 2x - 3. \text{ (4 балла)}$$

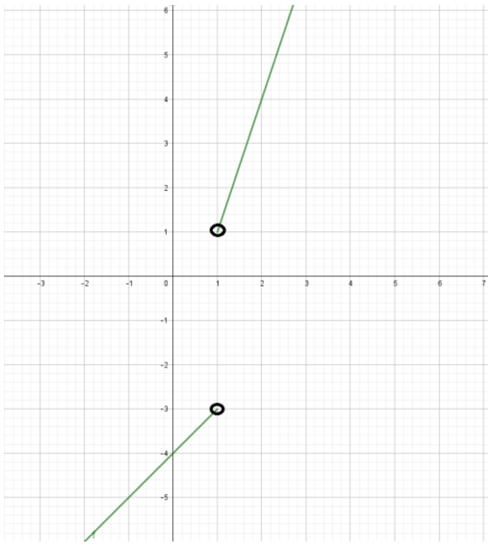
Решение:

Заметим, что в знаменателе содержится переменная. Учитывая, что знаменатель не может равняться нулю, поставим ограничение: $x - 1 \neq 0$. Значит, на графике функции будет выколотая точка/точки.
Раскроем модуль по определению:

$$y = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} + 2x - 3, & x - 1 > 0 \\ \dfrac{x^2-1}{-(x-1)} + 2x - 3, & x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} (x+1) + 2x - 3, & x - 1 > 0 \\ -(x+1) + 2x - 3, & x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 3x - 2, & x > 1 \\ x - 4, & x < 1 \end{cases}$$



4. **Теория чисел**

Найдите все тройки целых чисел x, y, z, для которых справедливо равенство

$$3(x-3)^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 = 33. \quad (1) \quad \text{(4 балла)}$$

Решение:

Заметим, что первое, второе и четвертое слагаемые в левой части равенства кратны трем. И правая часть кратна трем. Значит, $2z^2 \vdots 3$.

Тогда $z \vdots 3 \iff z = 3l, l \epsilon Z$.

Тогда (1) приводится к виду: $(x-3)^2 + 2y^2 + 6l^2 + 9y^2l^2 = 11$ (2)

$$(x-3)^2 + 2y^2 + 6l^2 + 9y^2l^2 = 11 \Leftrightarrow (x-3)^2 + 2y^2 + 9y^2l^2 = 11 - 6l^2 \;=>$$

$$11 - 6l^2 \geq 0 => \left[\begin{array}{l} l = 0 \\ l^2 = 1 \end{array}\right. \text{ (можно найти подбором).}$$

Пусть $l = 0$. Тогда (2) принимает вид: $(x-3)^2 + 2y^2 = 11$. Несложный перебор дает четыре тройки $(0; \pm1; 0)$ и $(6; \pm1; 0)$.

Пусть $l^2 = 1$, тогда имеем: $(x-3)^2 + 11y^2 = 5 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 5 - 11y^2$

При всех целых значениях $y \neq 0$ последнее равенство невозможно. Если y=0, то $(x-3)^2 = 5$ - в целых числах решений нет.

Ответ: (0; ±1; 0) и (6; ±1; 0).

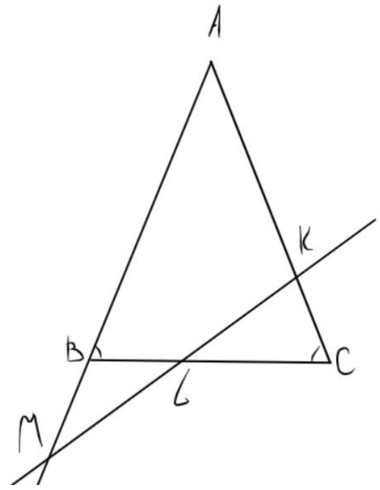
5. Геометрия

Прямая пересекает боковую сторону AC, основание BC и продолжение боковой стороны AB равнобедренного треугольника ABC в точках K, L и M соответственно. При этом треугольники CKL и BML также равнобедренные. Найдите их углы.

Решение:

I. Данная прямая пересекает продолжение стороны АВ за точку В.

Пусть $\angle ACB = \angle ABC = x$ (по свойству равнобедренного треугольника).
Углы при основании равнобедренного треугольника обязательно острые. Тогда угол MBL – тупой и $\angle MBL = 180° - x$. Значит, если треугольник BML равнобедренный, то его основание – ML и $\angle BLM = \angle BML$ (по свойству равнобедренного треугольника). Тогда $\angle BLM = \angle BML = x/2$.
$\angle BLM = \angle KLC = x/2$ (как вертикальные).
Из условия задачи неясно какие стороны равнобедренного треугольника CKL равны.



Поэтому рассмотрим три случая.

1 случай: $KL=KC$ – не может быть, так как $\angle KCL \neq \angle KLC$ (так как $x \neq x/2$).

2 случай: $KL=CL$. Тогда $\angle LKC = \angle LCK = x$. Составим уравнение:

$$x + x + \frac{x}{2} = 180 => x = 72.$$

$$\angle LKC = \angle LCK = 72°, \angle KLC = 36°.$$

$$\angle BML = \angle BLM = \angle KLC = 36°.$$

$$\angle MBL = 180 - 72 = 108°.$$

3 случай: *CL*=*CK*. Тогда $\angle CLK = \angle CKL = x/2$. Составим уравнение:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \mathrm{x} = 180 => x = 90°.$$

Но два угла в треугольнике ABC не могут равняться 90° - противоречие. Значит, 2 случай решений не имеет.

II. Данная прямая может пересекать продолжение стороны за точку А. Аналогично рассуждая, найдем, что углы полученных треугольников *CKL* и *BML* равны 45^{o}, 45^{o}, 90^{o}.

Ответ: $72°, 72°, 36°$ и $36°, 36°, 108°$ или 45^{o}, 45^{o}, 90^{o}.