

ГАОУ ТО «Физико-математическая школа»

Вступительная работа по математике в 7-й класс.

Профиль: биолого-химический

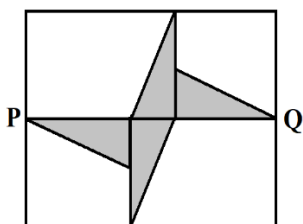
Тюмень, 20.06.2020

Время выполнения работы 90 минут

1. Первый сплав содержит 5% меди, второй — 13% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 4 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава.
2. Найдите пары чисел a и b , удовлетворяющие уравнению:

$$|2b - 3a + 5| + |16 - b^2| = 0.$$

3. Внутри прямоугольника, стороны которого равны 35 и 40, расположены 4 одинаковых прямоугольных треугольника. Точки P и Q — середины сторон прямоугольника. Найдите отношение площадей закрашенной и незакрашенной фигур.



4. Градусные меры углов треугольника — целые числа, никакие два из которых не равны между собой. Каждое меньшее из этих чисел делит большее число. Найдите градусные меры углов треугольника, если меньшая из них выражена двузначным числом. Сумма углов треугольника равна 180 градусов.
5. По лыжне кольцевого маршрута с постоянными скоростями бегут Чебурашка и Крокодил Гена в одном направлении, а старуха Шапокляк — в противоположном. Шапокляк встречается с Геной каждые две минуты, а с Чебурашкой — каждые три минуты. Через сколько минут Крокодил Гена обгоняет Чебурашку?

ГАОУ ТО «Физико-математическая школа»

Вступительная работа по математике в 7-й класс.

Профиль: физико-математический

Тюмень, 20.06.2020

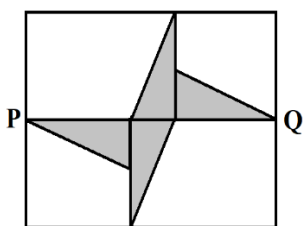
Время выполнения работы 90 минут

1. Два мотоциклиста отправляются одновременно навстречу друг другу из пунктов А и В, расстояние между которыми равно 600 км. В то время как первый проходит 250 км, второй проходит 200 км. Найти скорости движения мотоциклистов, считая их движения равномерными, если один из них прибыл в пункт назначения на 3 ч раньше, чем другой.

2. Найдите пары чисел a и b , удовлетворяющие уравнению:

$$|2b - 3a + 5| + |16 - b^2| = 0.$$

3. Внутри прямоугольника, стороны которого равны 35 и 40, расположены 4 одинаковых прямоугольных треугольника. Точки Р и Q – середины сторон прямоугольника. Найдите отношение площадей закрашенной и незакрашенной фигур.



4. Градусные меры углов треугольника – целые числа, никакие два из которых не равны между собой. Каждое меньшее из этих чисел делит большее число. Найдите градусные меры углов треугольника, если меньшая из них выражена двузначным числом. Сумма углов треугольника равна 180 градусам.
5. По лыжне кольцевого маршрута с постоянными скоростями бегут Чебурашка и Крокодил Гена в одном направлении, а старуха Шапокляк – в противоположном. Шапокляк встречается с Геной каждые две минуты, а с Чебурашкой – каждые три минуты. Через сколько минут Крокодил Гена обгоняет Чебурашку?

1.1 (биохим) Первый сплав содержит 5% меди, второй — 13% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 4 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава.

Решение:

Пусть масса первого сплава x кг. Тогда масса второго сплава $(x + 4)$ кг, а третьего — $(2x + 4)$ кг. В первом сплаве содержится $0,05x$ кг меди, а во втором — $0,13(x + 4)$ кг. Поскольку в третьем сплаве содержится $0,1(2x + 4)$ кг меди, составим и решим уравнение:

$$0,05x + 0,13(x + 4) = 0,1(2x + 4)$$

$$0,05x + 0,13x + 0,52 = 0,2x + 0,4$$

$$0,02x = 0,12$$

$$x = 6$$

Следовательно, масса первого сплава 6 кг, а масса второго – 10кг. Масса третьего сплава тогда равна $6+10=16$ кг.

Ответ: 16 кг.

Критерии оценивания

Приведено полное обоснованное решение	5 баллов
Приведено полное обоснованное решение, но допущена одна вычислительная ошибка	4 балла
Верно составлена математическая модель	3 балла
Обосновано найдена масса одного из сплавов Или составлена верно математическая модель, но допущены фактические ошибки при решении уравнения	2 балла
Верный ответ без обоснования, в том числе найденный подбором	0 баллов

1.2(физмат) Два мотоциклиста отправляются одновременно навстречу друг другу из пунктов А и В, расстояние между которыми равно 600 км. В то время как первый проходит 250 км, второй проходит 200 км. Найдите скорости движения мотоциклистов, считая их движения равномерными, если один из них прибыл в пункт назначения на 3 ч раньше, чем другой.

Решение:

В то время как первый проходит 250 км, второй проходит 200 км. Отсюда следует, что скорости первого и второго мотоциклистов относятся как 250:200. Значит, составим пропорцию и упростим:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{250}{200} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{5}{4} \Rightarrow v_1 = 1,25v_2.$$

Составим таблицу:

	Первый мотоциклист	Второй мотоциклист
$V, \text{ км/ч}$	$1,25v_2$	v_2
$t, \text{ ч}$	$\frac{600}{1,25v_2}$	$\frac{600}{v_2}$
$S, \text{ км}$	600	600

Один из них прибыл в пункт назначения на 3 ч раньше, чем другой. У первого скорость больше, значит, первый прибыл на 3 ч раньше. Составим и решим уравнение:

$$\frac{600}{v_2} - \frac{600}{1,25v_2} = 3 \Rightarrow \frac{600}{v_2} - \frac{480}{v_2} = 3 \Rightarrow \frac{120}{v_2} = 3 \Rightarrow$$

$$v_2 = 40 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \Rightarrow v_1 = 50 \text{ км/ч}$$

Ответ: 40 км/ч, 50км/ч.

Критерии оценивания

Приведено полное обоснованное решение	5 баллов
Приведено полное обоснованное решение, но допущена одна вычислительная ошибка	4 балла
Верно составлена математическая модель	3 балла
Обосновано найдена одна из скоростей одного Или составлена верно математическая модель, но допущены фактические ошибки при решении уравнения	2 балла
Верно определено отношение скоростей или скорости найдены методом подбора	1 балл
Верный ответ без обоснования, в том числе найденный подбором	0 баллов

2. Найдите пары чисел a и b , удовлетворяющие уравнению:

$$|2b - 3a + 5| + |16 - b^2| = 0.$$

Решение:

Так как $|x| \geq 0$, то $|2b - 3a + 5| + |16 - b^2| = 0$ тогда и только тогда, когда оба слагаемых равны 0 одновременно. Получим два уравнения

$|2b - 3a + 5| = 0$ и $|16 - b^2| = 0$. Заметим, что второе уравнение содержит только одну переменную, найдем ее.

$$|16 - b^2| = 0 \Rightarrow 16 - b^2 = 0 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$$

Подставив в первое уравнение вместо b найденные значения, найдем a :

$$b = 4 \Rightarrow |2 \cdot 4 - 3a + 5| = 0 \Rightarrow |13 - 3a| = 0 \Rightarrow 13 - 3a = 0$$

$$\Rightarrow 3a = 13 \Rightarrow a = 4\frac{1}{3}$$

$$b = -4 \Rightarrow |2 \cdot (-4) - 3a + 5| = 0 \Rightarrow |-3 - 3a| = 0$$

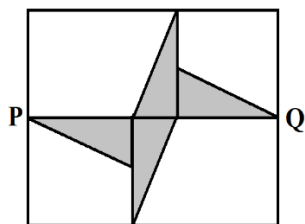
$$\Rightarrow -3 - 3a = 0 \Rightarrow -3a = 3 \Rightarrow a = -1$$

Ответ: $a = 4\frac{1}{3}, b = 4;$ $a = -1, b = -4.$

Критерии оценивания

Приведено полное обоснованное решение	5 баллов
Приведено полное обоснованное решение, но допущена одна вычислительная ошибка	4 балла
Обоснованно найдено одно решение	3 балла
Оба решения найдены подбором с описанием или приведена оценка слагаемых и получены 2 уравнения, но дальнейших продвижений нет	2 балла
Найден один из ответов подбором с описанием	1 балл
Приведен верный ответ без обоснований, в том числе найденный подбором	0 баллов

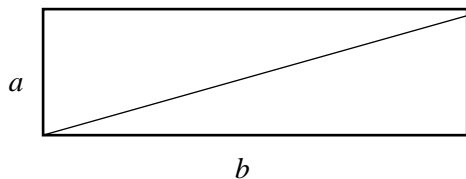
3. Внутри прямоугольника, стороны которого равны 35 и 40, расположены 4 одинаковых прямоугольных треугольника. Точки P и Q – середины сторон прямоугольника. Найдите отношение площадей закрашенной и незакрашенной фигур.



Решение:

Пусть S_1 – площадь закрашенной части (она состоит из четырех одинаковых прямоугольных треугольника), S_2 – площадь незакрашенной части.

Вычислим сначала S_1 . Заметим, что если два одинаковых треугольника совместить, то получим прямоугольник:



Найдем стороны получившегося прямоугольника:

$$b = \frac{35}{2} = 17,5; \quad a = 40 - 17,5 \cdot 2 = 5$$

Следовательно, $S_1 = 2 \cdot (17,5 \cdot 5) = 175$. Площадь всего прямоугольника равна $35 \cdot 40 = 1400 \Rightarrow S_2 = 1400 - 175 = 1225$

Значит, отношение $\frac{S_1}{S_2} = \frac{175}{1225} = \frac{1}{7}$

Ответ: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{7}$

Критерии оценивания

Приведено полное обоснованное решение	5 баллов
Приведено полное обоснованное решение, но допущена одна вычислительная ошибка	4 балла
Верно найдены площади закрашенной и незакрашенной частей, но найдено обратное отношение или найдено отношение площади незакрашенной части к площади всего прямоугольника	3 балла
Верно найдено отношение площади закрашенной части к площади всего прямоугольника	2 балла
При нахождении площади закрашенной фигуры допущена фактическая ошибка или приведена верная идея без дальнейшего продвижения	1 балл
Приведен верный ответ без обоснований	0 баллов

4. Градусные меры углов треугольника – целые числа, никакие два из которых не равны между собой. Каждое меньшее из этих чисел делит большее число. Найдите градусные меры углов треугольника, если меньшая из них выражена двузначным числом. Сумма углов треугольника равна 180 градусов.

Решение:

Пусть углы треугольника равны a, b, c . Причем, известно, что все они разные целые числа. Пусть $a > b > c$ и c – двузначное число.

Каждое меньшее из этих чисел делит большее число. Следовательно, каждое меньшее является делителем большего числа. Запишем это условие в буквенном виде:

$$b = nc \quad (n - \text{натуральное, } n > 1)$$

$$a = kb = knc \quad (k - \text{натуральное, } k > 1)$$

Сумма углов треугольника равна 180 градусов. Составим уравнение:

$$a + b + c = 180 \Rightarrow knc + nc + c = 180 \Rightarrow c(kn + n + 1) = 180$$

Так как числа a, b, c – целые, то число c является двузначным делителем 180.

Выпишем все натуральные двузначные делители 180: 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90. Проверим эти числа:

$$c = 10 \Rightarrow kn + n + 1 = 18 \Rightarrow n(k + 1) = 17, \text{ так как } 17 -$$

простое число и $n > 1, k > 1$, то это уравнение не имеет натуральных корней;

$$c = 12 \Rightarrow kn + n + 1 = 15 \Rightarrow n(k + 1) = 14.$$

Так как $14 = 2 * 7$ или $14 = 7 * 2$, то получим 2 случая:

$$1 \text{ случай: } n = 2, k + 1 = 7 \Rightarrow n = 2, k = 6 \text{ (все условия соблюдены)}$$

Следовательно, можем найти a, b и c .

$$\underline{a = 2 * 6 * 12 = 144^\circ, b = 2 * 12 = 24^\circ, c = 12^\circ}$$

$$2 \text{ случай: } n = 7, k + 1 = 2 \Rightarrow n = 7, k = 1 \text{ (противоречит условию } k > 1)$$

$c = 15 \Rightarrow kn + n + 1 = 12 \Rightarrow n(k + 1) = 11$, так как 11 – простое число и $n > 1, k > 1$, то это уравнение не имеет натуральных корней;

$$c = 18 \Rightarrow kn + n + 1 = 10 \Rightarrow n(k + 1) = 9.$$

$$9 = 3 * 3 = 1 * 9$$

$1 * 9$ не имеет смысла рассматривать ($k > 1, n > 1$). Рассмотрим $3 * 3$:

$$n = 3, k + 1 = 3 \Rightarrow k = 2, n = 3 \text{ (все условия соблюдены)}$$

Следовательно, можем найти a, b и c .

$$\underline{a = 2 * 3 * 18 = 108^\circ, b = 3 * 18 = 54^\circ, c = 18^\circ}$$

$$c = 20 \Rightarrow kn + n + 1 = 9 \Rightarrow n(k + 1) = 8.$$

$$8 = 2 * 4 = 4 * 2$$

$1 * 8$ не имеет смысла рассматривать ($k > 1, n > 1$).

Рассмотрим $4 * 2$: $n = 4, k + 1 = 2 \Rightarrow n = 4, k = 1$ (противоречит условию $k > 1$)

Рассмотрим $2 * 4$:

$$n = 2, k + 1 = 4 \Rightarrow n = 2, k = 3 \text{ (все условия соблюдены)}$$

Следовательно, можем найти a, b и c .

$$\underline{a = 2 * 3 * 20 = 120^\circ, b = 2 * 20 = 40^\circ, c = 20^\circ}$$

$c = 30 \Rightarrow kn + n + 1 = 6 \Rightarrow n(k + 1) = 5$, так как 5 – простое число и $n > 1, k > 1$, то это уравнение не имеет натуральных корней;

$$c = 36 \Rightarrow kn + n + 1 = 5 \Rightarrow n(k + 1) = 4, \text{ так как } 4 = 2 * 2, \text{ то } k + 1 = 2 \text{ (противоречит условию } k > 1)$$

Оставшиеся случаи ($c=45, 60, 90$) рассматривать не имеет смысла, так как при увеличении числа c сумма $(kn + n + 1)$ будет уменьшаться, а это приводит к противоречию условиям ($k > 1, n > 1$).

Ответ: $144^\circ, 24^\circ, 12^\circ$; $108^\circ, 54^\circ, 18^\circ$; $120^\circ, 40^\circ, 20^\circ$

Критерии оценивания

Приведено полное обоснованное решение	5 баллов
Приведено полное обоснованное решение, но допущена одна вычислительная ошибка или не рассмотрен какой-либо из делителей, но при этом найден верный ответ	4 балла
Получены с обоснованием любые два из трех решений или получены все три, но не разобраны хотя бы 2 делителя, при которых возникает противоречие	3 балла
Получено с обоснованием какое-то одно из верных решений или верно составлена математическая модель и определены возможные значения меньшего из углов	2 балла
Верно составлена математическая модель, но продвижений нет или один из ответов найден методом подбора	1 балл
Приведен верный ответ без обоснований	0 баллов

5. По лыжне кольцевого маршрута с постоянными скоростями бегут Чебурашка и Крокодил Гена в одном направлении, а старуха Шапокляк – в противоположном. Шапокляк встречается с Геной каждые две минуты, а с Чебурашкой – каждые три минуты. Через сколько минут Крокодил Гена обгоняет Чебурашку?

Решение:

Заметим, что время, проходящее между встречами любых двоих из трех героев не зависит от того, в какой точке трассы находился каждый из них в начале движения, поэтому можно полагать, что все они начали бег из одной точки трассы. Спустя 6 минут от начала движения Шапокляк встретила в третий раз Крокодила Гену и во второй раз – Чебурашку. Это значит, что все герои опять в одной точке трассы, но Гена пробежал на один круг больше, чем Чебурашка. Значит, он его только что догнал в первый раз, и, следовательно, он догоняет Чебурашку ровно за 6 минут.

Ответ: за 6 минут.

Критерии оценивания

Приведено полное обоснованное решение	5 баллов
Недостаточно обоснованное решение	4 балла
Проведен сравнительный анализ расстояний, пройденных всеми участниками, но дальнейших продвижений нет	3 балла
Проведен сравнительный анализ расстояний, пройденных двумя любыми героями, но дальнейших продвижений нет	2 балла
Приведен верный ответ без обоснований	0 баллов

