Решение вступительной работы в 10 класс ГАОУ ТО “ФМШ” в 2018 году

1. Упростите выражение $\frac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}}$ при $x \in (0;2)$.

Ответ: $-\sqrt{\boldsymbol{x}}$. <u>*Решение*</u>: $\frac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{x^2+4x+4-8x}}{\frac{x-2}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{(x-2)^2}\cdot\sqrt{x}}{x-2} = \frac{|x-2|\cdot\sqrt{x}}{x-2} = -\frac{(x-2)\sqrt{x}}{x-2} = -\sqrt{x}$.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0, \\ y^2 - x^2 = 12. \end{cases}$

Ответ: (2;4), (-2;-4). <u>*Решение*</u>:

1) решим систему однородных уравнений, для этого убедимся, что пара (0;0) не является решением системы;

2) преобразуем первое уравнение системы $2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 3\frac{x}{y} + 1 = 0$;

3) выполнив замену $t = \frac{x}{y}$, получим $t_1 = 1, t_2 = \frac{1}{2}$.

4) убедимся, что при $t_1 = 1$ система решений не имеет.

5) из замены $t = \frac{x}{y}$ при $t_2 = \frac{1}{2}$ получим две пары решений.

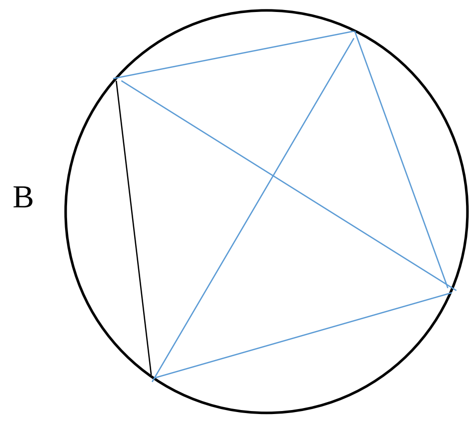
3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(2a-5)x^2 - 2(a-1)x + 3 = 0$ имеет единственное решение.

Ответ: $\boldsymbol{a_1 = 2{,}5, a_2 = 4}$. <u>*Решение*</u>:

1) Если $a = 2{,}5$, то уравнение линейное и $x = 1$;
2) Если $a \neq 2{,}5$, то уравнение квадратное. Это уравнение будет иметь единственное решение только в том случае, когда дискриминант равен 0: $D = 4(a-1)^2 - 12(2a-5) = 4a^2 - 8a + 4 - 24a + 60 = 4a^2 - -32a + 64 = 4(a^2 - 8a + 16) = 4(a-4)^2 = 0$. Значит, $a = 4$.

4. Четырёхугольник *ABCD* вписан в окружность. Диагональ *AC* является биссектрисой угла *BAD* и пересекается с диагональю *BD* в точке *K*. Найдите *KC*, если *BC* = *4* и *AK* = *6*.

Ответ: KC = 2. <u>*Решение*:</u>



1) ∠BAC = ∠CAD = ∠CBD;

2) ΔBAC ~ ΔKBC:

$\frac{BA}{KB} = \frac{BC}{KC} = \frac{AC}{BC}$;

3) $KC = x : \frac{4}{x} = \frac{6+x}{4}$, D

т.е. $x = 2$.

A

5. Пусть h_1, h_2, h_3 – высоты треугольника, r – радиус вписанной окружности. Докажите, что $h_1 + h_2 + h_3 \geq 9r$.

Доказательство:

1) пусть a, b, c – стороны треугольника, соответствующие высотам h_1, h_2, h_2; S – площадь треугольника, тогда $S = \frac{1}{2}\, ah_1 = \frac{1}{2}\,(a + b + c)r$. Поэтому $h_1 = (1 + {}^{b}/_{a} + {}^{c}/_{a})r$.
2) аналогично $h_2 = (1 + {}^{a}/_{b} + {}^{c}/_{b})r$, $h_3 = (1 + {}^{a}/_{c} + {}^{b}/_{c})r$;
3) следовательно, $h_1 + h_2 + h_3 = (3 + ({}^{b}/_{a} + {}^{a}/_{b}) + ({}^{c}/_{a} + {}^{a}/_{c}) + ({}^{c}/_{b} + {}^{b}/_{c}) \geq (3 + 2 + 2 + 2)r = 9r$.

Ч.т.д.

6. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно, причём $\angle BAM = \angle MAK$. Докажите, что $BM + KD = AK$.

Доказательство:

1) повернём квадрат $ABCD$ относительно точки A на 90^0 так, чтобы точка B перешла в точку D.
2) при этом повороте точка M переходит в точку M_1, а точка K – в точку K_1;
3) понятно, что $\angle BMA = \angle DM_1A$;
4) так как $\angle MAK = \angle MAB = \angle M_1AD$, то $\angle MAD = \angle M_1AK$;
5) поэтому $\angle M_1AK = \angle MAD = \angle BMA = \angle DM_1A$, значит, $AK = KM_1 = KD + DM_1 = KD + BM$.

Ч.т.д.