Вступительная контрольная работа для поступающих
в 10-й класс ГАОУ ТО «ФМШ» в 2020 году.
(для физико-математического профиля).

Время выполнения работы *140 минут*

1. Найдите значение выражения $\sqrt{\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2-4} \cdot \frac{2x}{x^2-1}$ при $x \in [-2; 2]$.

(8 баллов)

Решение.

$\sqrt{\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^2} \cdot \frac{2x}{x^2-1} = \left|\frac{x^2-1}{x}\right| \cdot \frac{2x}{x^2-1}$. Выражение $\frac{x^2-1}{x}$, принимает положительные значения на промежутках $-1< x < 0$ и $x > 1$, а отрицательные при $x < -1$ и $0 < x < 1$. Значит, раскрывая модуль, с учётом знака выражения $\frac{x^2-1}{x}$, имеем:

при $-2 \le x < -1$, $0 < x < 1$ значение выражения равно -2;

при $-1 < x < 0$, $1 < x \le 2$ значение выражения равно 2;

при $x = -1, 0, 1$ выражение не имеет смысла.

2. Последовательность из двух различных чисел ***a*** и ***b*** продолжили двумя способами так, чтобы получилась *геометрическая прогрессия* и так, чтобы получилась *арифметическая прогрессия*. При этом *третий член геометрической прогрессии* совпал с *десятым членом арифметической прогрессии*. С каким членом арифметической прогрессии совпадёт четвёртый член геометрической прогрессии? (9 баллов)

(*problems.ru, задача №116226)*

Решение.

Пусть a — первое из двух чисел исходной последовательности, d — разность арифметической прогрессии, а q — знаменатель геометрической прогрессии. Тогда по условию задачи $a + d = aq$, $a + 9d = aq^2$. Следовательно, $a(q - 1) = d$ и $a(q - 1)(q + 1) = a(q^2 - 1) = 9d = 9a(q - 1)$. Поскольку $q \neq 1$, отсюда получаем $q = 8$ и $aq^3 = a + a(q^3 - 1) = a + a(q - 1)(q^2 + q + 1) = a + 73d$. Таким образом, четвёртый член геометрической прогрессии совпал с 74-м членом арифметической прогрессии.

3. Многочлен $x^2 + ax + b + 1$ с целыми коэффициентами имеет *два натуральных корня*. Докажите, что $a^2 + b^2$ – составное. (12 баллов)

(*вариация задачи №86519, problems.ru)*

Решение.

Составим уравнение в стандартном виде: $x^2 + ax + (b + 1) = 0$. Так как наше уравнение имеет корни, то по теореме Виета, имеем:
$x_1 + x_2 = -a$, $x_1 \cdot x_2 = 1 - b$, где x_1 и x_2 – корни данного уравнения. Выражая из полученных равенств a и b, получаем $a^2 + b^2 = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 \cdot x_2 - 1)^2 = x_1^2 + 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 + 1 - 2x_1 \cdot x_2 + x_1^2 \cdot x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + 1 + x_1^2 \cdot x_2^2 = (x_1^2 + 1) \cdot (x_2^2 + 1)$. По условию каждый из корней - натуральное число, следовательно, каждый из множителей – натуральное число, отличное от единицы.

4. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ $\angle A = 60°$, а остальные углы равны между собой. Также известно, что *AB* = *6*, *CD* = *4*, *EA* = *7*. Найдите *расстояние* от точки *A* до прямой *CD*. (9 баллов)

(*Олимпиада «Формула Единства»/ «Третье тысячелетие»)*

Решение.

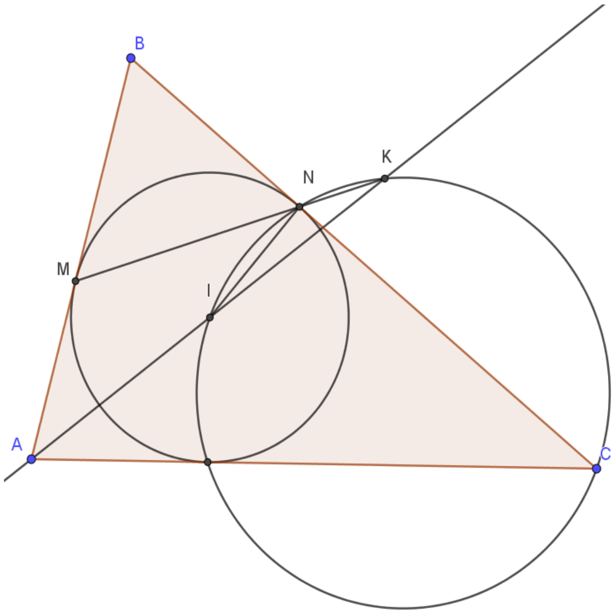
Ясно, что все остальные углы равны 120º, поэтому *AB* || *DE* и *BC* || *AE*. Также *DE* = *2* и *BC* = *3*. Искомое расстояние — это высота правильного треугольника со стороной 9 (до которого можно достроить исходный пятиугольник), то есть $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

5. Пусть *M* и *N* – точки касания вписанной окружности со сторонами *BA* и *BC* треугольника *ABC*, *K* – точка пересечения биссектрисы угла *A* с прямой *MN*. Доказать, что $\angle AKC = 90°$. (10 баллов)

(*вариация задачи №56584, problems.ru; Материалы занятий «задача 255» http://math.mosolymp.ru/upload/files/2018/khamovniki/geom-9/2018-01-23-255.pdf; III Открытая олимпиада по геометрии ГАОУ ТО "ФМШ", Первый тур 10-11 класс https://fmschool72.ru/uchashchimsya/geometrical-olympiad/*)

Решение.

Пусть I - центр вписанной окружности; точки C, I, K и M лежат на одной окружности (∠CIK =∠A/2+∠C/2= =90°-∠B/2=∠KMB=180°-∠KMC; если же точка K - на продолжении NM, то ∠CIK = ∠CMK. Таким образом, ∠IKC=∠IMC=90°.



6. Прямая проходит через центр квадрата со стороной *1*. Найдите сумму квадратов расстояний от всех вершин квадрата до этой прямой. (12 баллов) (*задача №56525, problems.ru;)*

Решение.

Пусть прямая, проходящая через центр O квадрата $ABCD$, пересекает сторону AB. Опустим на неё перпендикуляры AP и BQ. Треугольники APO и OQB равны по гипотенузе и острому углу. Поэтому $AP^2 + BQ^2 = AP^2 + OP^2 = AO^2 = \frac{1}{2}$. Таким образом Вся сумма равна 1.