ششمین المپیاد هندسهٔ ایران

Iranian Geometry Olympiad

مسائل رویداد به همراه راه‌حل‌ها

ششمین المپیاد هندسهٔ ایران
مسائل رویداد به همراه راه‌حل‌ها

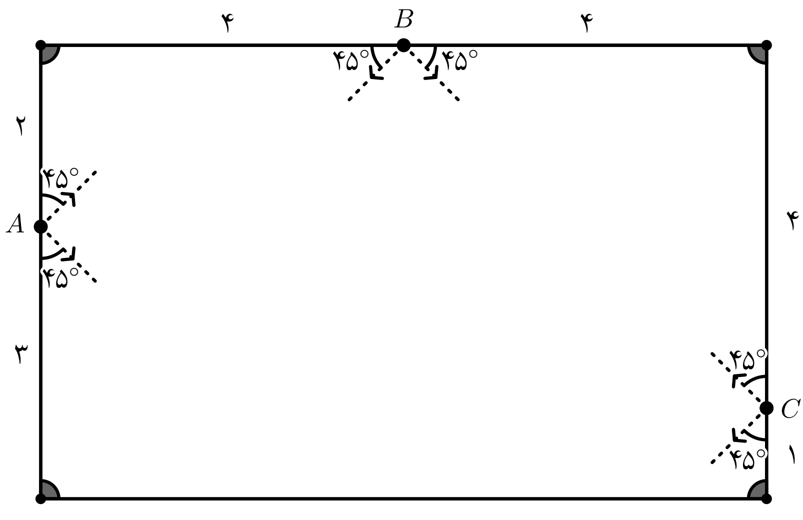
این دفترچه توسط علیرضا دادگرنیا و بنیامین قاسمی‌نیا آماده شده است.

فهرست مطالب

سطح مقدماتی

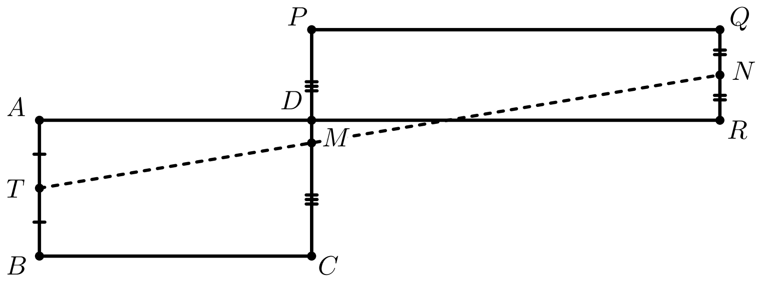
مسائل

۱) میزی به شکل یک مستطیل ۵ × ۸ داریم. در چهار گوشه این میز سوراخ‌هایی قرار دارد. پس از شلیک توپی در جهت نشان داده شده از هر یک از نقاط A و B و C آیا توپ بعد از ۶ بار برخورد به دیواره‌های میز به درون یکی از سوراخ‌ها خواهد افتاد؟ (توپ پس از برخورد با دیواره‌های میز با همان زاویه باز می‌گردد).



(← ص.۵)

۲) مطابق شکل، $ABCD$ و $PQRD$ دو مستطیل با مساحت برابر هستند که اضلاع متناظر موازی دارند. نقاط M، N و T به‌ترتیب اوساط پاره‌خط‌های PC، QR و AB هستند. ثابت کنید نقاط N، M و T روی یک خط قرار دارند.



(← ص.۸)

۳) در صفحه $n > ۲$ خط در حالت عمومی رسم شده‌اند؛ یعنی هر دو خط با یکدیگر برخورد می‌کنند ولی هیچ سه خطی همرس نیستند. تمامی نقاط برخورد خطوط با یکدیگر علامت گذاشته می‌شود. سپس همگی خطوط پاک می‌شوند ولی نقاط علامت‌گذاری‌شده باقی می‌مانند. نمی‌دانیم کدام نقطه متعلق به کدام خط است. آیا ممکن است بدانیم هر خط به کجا تعلق دارد، و همگی آن‌ها را بازیابی کنیم؟ (← ص.۹)

۴) چهارضلعی $ABCD$ داده شده است به‌طوری‌که

$$\angle DAC = \angle CAB = ۶۰^\circ,$$

و

$$AB = BD - AC.$$

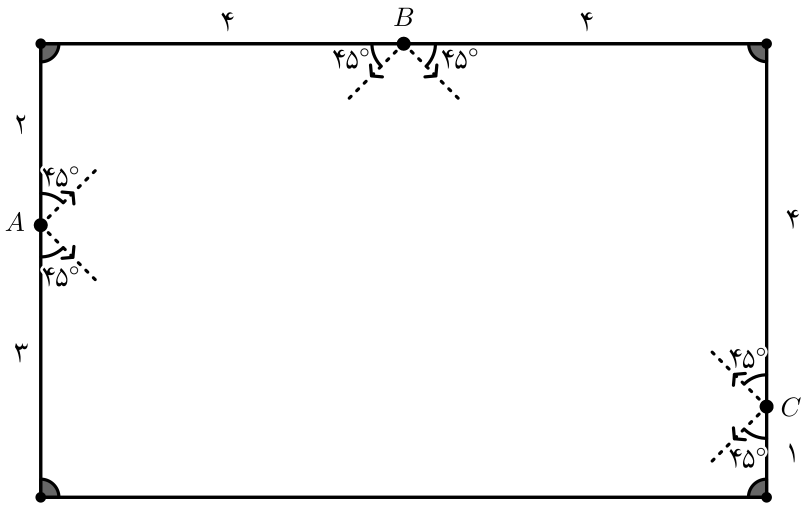
خطوط AB و CD در نقطهٔ E متقاطع‌اند. ثابت کنید $\angle ADB = ۲\angle BEC$.

(← ص.۱۰)

۵) برای یک چندضلعی محدب (چندضلعی‌ای که همهٔ زوایای آن کوچک‌تر از ۱۸۰° هستند) یک قطر را منصف گوییم اگر هم مساحت و هم محیط چندضلعی را نصف کند. حداکثر چند قطر منصف در یک پنج‌ضلعی محدب داریم؟ (← ص.۱۱)

راه حل‌ها

۱) میزی به شکل یک مستطیل ۵×۸ داریم. در چهار گوشه این میز سوراخ‌هایی قرار دارد. پس از شلیک توپی در جهت نشان داده شده از هر یک از نقاط A و B و C آیا توپ بعد از ۶ بار برخورد به دیواره‌های میز به درون یکی از سوراخ‌ها خواهد افتاد؟ (توپ پس از برخورد با دیواره‌های میز با همان زاویه باز می‌گردد).

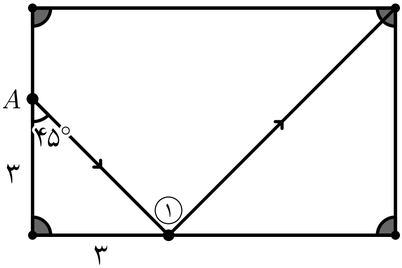


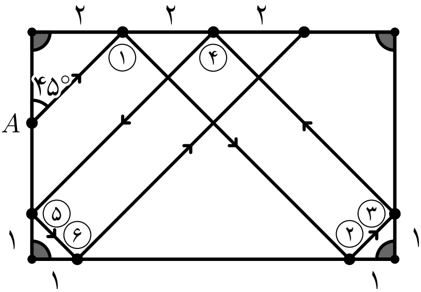
طرح شده توسط هیراد عالی‌پناه

- -

راه حل. با توجه به نحوهٔ بازتاب توپ، به سادگی می‌توان مسیر آن را در هر یک از حالات تعیین کرد.

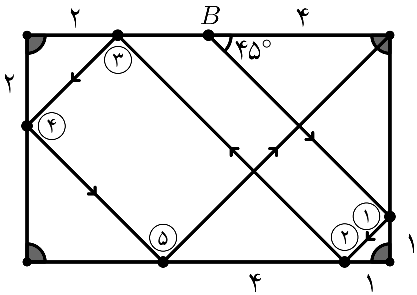
نقطهٔ A:

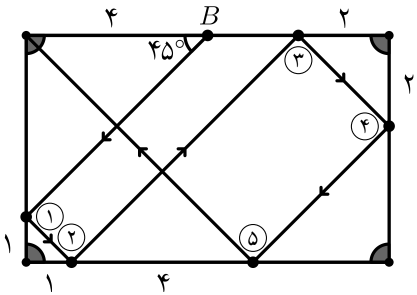




(الف) توپ پس از یک بازتاب به درون سوراخ می‌افتد. (ب) توپ پس از شش بازتاب به درون سوراخی نمی‌افتد.

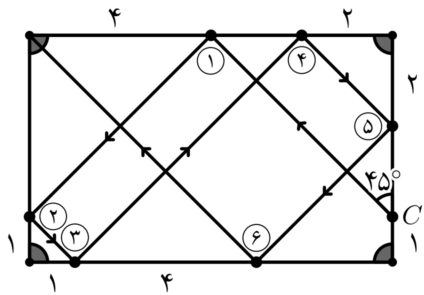
نقطهٔ B:

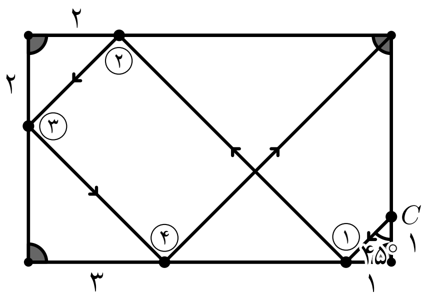




(الف) توپ پس از پنج بازتاب به درون سوراخ می‌افتد. (ب) توپ پس از پنج بازتاب به درون سوراخ می‌افتد.

نقطهٔ C:





(الف) توپ پس از شش بازتاب به درون سوراخ می‌افتد. (ب) توپ پس از چهار بازتاب به درون سوراخ می‌افتد.

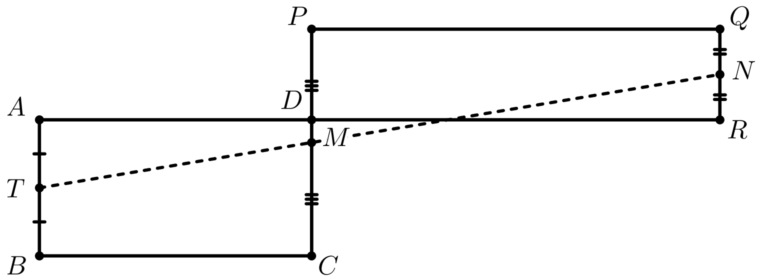
به دو شکل می‌توان به مسئله نگاه کرد:

۱. مسیرهایی که توپ بعد از حداکثر ۶ بازتاب به سوراخ می‌افتد:
در این حالت همهٔ موارد به غیر از A (ب) مطلوب‌اند.

۲. مسیرهایی که توپ بعد از دقیقاً ۶ بازتاب به سوراخ می‌افتد:
در این حالت تنها مورد C(الف) مطلوب است.

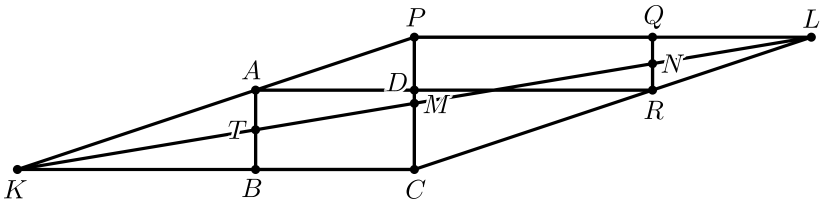
■

۲) مطابق شکل، $ABCD$ و $PQRD$ دو مستطیل با مساحت برابر هستند که اضلاع متناظر موازی دارند. نقاط M، N و T به‌ترتیب اوساط پاره‌خط‌های PC، QR و AB هستند. ثابت کنید نقاط N، M و T روی یک خط قرار دارند.



طرح شده توسط مرتضی ثقفیان

راه حل. محل برخورد PQ و CR را L و محل برخورد BC و AP را K بنامید.



طبق قضیهٔ تالس L، N و M روی یک خط قرار دارند و همچنین نقاط K، T و M نیز روی یک خط قرار دارند. پس اگر نشان دهیم چهارضلعی $PLCK$ متوازی‌الاضلاع است آن‌گاه نتیجه می‌شود K، M و L روی یک خط قرار دارند و حکم نتیجه می‌شود. از آن‌جا که $CK \parallel PL$ کافی است نشان دهیم $CL \parallel PK$ یا $CR \parallel PA$. از آن‌جا که مساحت دو مستطیل برابر است می‌توان نوشت

$$PD \cdot DR = AD \cdot CD \Longrightarrow \frac{PD}{CD} = \frac{AD}{DR}$$

پس طبق عکس قضیهٔ تالس $CR \parallel AP$ و حکم ثابت شد. ■

۳) در صفحه $n > ۲$ خط در حالت عمومی رسم شده‌اند؛ یعنی هر دو خط با یکدیگر برخورد می‌کنند ولی هیچ سه خطی همرس نیستند. تمامی نقاط برخورد خطوط با یکدیگر علامت گذاشته می‌شود. سپس همگی خطوط پاک می‌شوند ولی نقاط علامت‌گذاری‌شده باقی می‌مانند. نمی‌دانیم کدام نقطه متعلق به کدام خط است. آیا ممکن است بدانیم هر خط به کجا تعلق دارد، و همگی آن‌ها را بازیابی کنیم؟

طرح شده توسط Boris Frenkin ـ روسیه

- -

پاسخ. بله، ممکن است.

راه حل. همهٔ خطوطی که از حداقل $n - ۱$ نقطهٔ علامت‌گذاری‌شده می‌گذرند را رسم می‌کنیم. همهٔ خطوط پاک شده بین این خطوط هستند. فرض کنید خط ℓ شامل $n - ۱$ نقطهٔ علامت‌گذاری‌شده باشد. این نقاط محل تقاطع جفت خطوط $(\ell_۱, \ell_۲), (\ell_۳, \ell_۴), \ldots, (\ell_{۲n-۳}, \ell_{۲n-۲})$ از خطوط پاک‌شده هستند. از آن‌جا که $n > ۲$ می‌توان نوشت $۲n - ۲ > n$ پس اعداد $۱ \leq i < j \leq ۲n - ۲$ وجود دارند به‌طوری‌که ℓ_i بر ℓ_j منطبق باشد. پس دو نقطه از نقاط روی ℓ روی ℓ_i نیز قرار دارند در نتیجه دو خط ℓ و ℓ_i بر هم منطبق‌اند و ℓ یکی از خطوط پاک‌شده است. به‌طور مشابه بقیهٔ خطوط رسم‌شده نیز همان خطوط پاک شده هستند پس همهٔ آن‌ها بازیابی‌شده‌اند و حکم نتیجه می‌شود. ■

۴) چهارضلعی $ABCD$ داده شده است به‌طوری‌که

$$\angle DAC = \angle CAB = ۶۰^\circ,$$

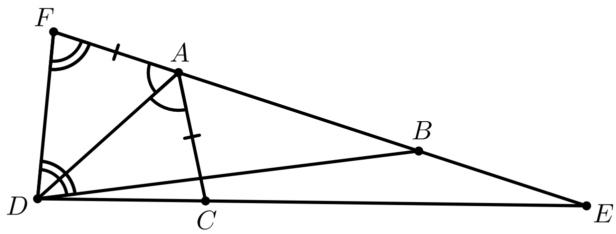
و

$$AB = BD - AC.$$

خطوط AB و CD در نقطهٔ E متقاطع‌اند. ثابت کنید $\angle ADB = ۲\angle BEC$.

طرح شده توسط ایمان مقصودی

راه حل. نقطهٔ F را روی امتداد BA از طرف A درنظر می‌گیریم به‌طوری‌که $AF = AC$.



از تساوی $AB = BD - AC$ نیز نتیجه می‌شود $BF = BD$. می‌توان نوشت

$$\left.\begin{array}{l} AF = AC \\ AD = AD \\ \angle FAD = \angle CAD = ۶۰^\circ \end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle FAD \cong \triangle CAD. \qquad (۱)$$

حالا دقت کنید که

$$\angle BEC = \angle FAD - \angle ADC \overset{(۱)}{=} ۶۰^\circ - \angle ADF \qquad (۲)$$

و از طرف دیگر

$$\begin{aligned} \angle ADB = \angle FDB - \angle ADF &= \angle AFD - \angle ADF \\ &= (۱۲۰^\circ - \angle ADF) - \angle ADF \\ &= ۱۲۰^\circ - ۲\angle ADF \\ &\overset{(۲)}{=} ۲\angle BEC \end{aligned}$$

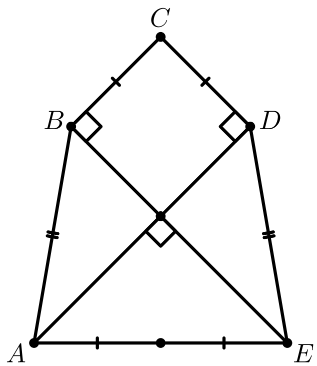
پس حکم مسئله ثابت شد. ■

۵) برای یک چندضلعی محدب (چندضلعی‌ای که همهٔ زوایای آن کوچک‌تر از 180° هستند) یک قطر را منصف گوییم اگر هم مساحت و هم محیط چندضلعی را نصف کند. حداکثر چند قطر منصف در یک پنج‌ضلعی محدب داریم؟

طرح شده توسط مرتضی ثقفیان

پاسخ. حداکثر تعداد قطرهای منصف برابر با ۲ است.

راه حل. دقت کنید که برای هر راس حداکثر یک قطر منصف وجود دارد که از آن راس بگذرد پس حداکثر تعداد قطرهای منصف در یک پنج‌ضلعی محدب می‌تواند برابر با ۲ باشد. شکلی که در ادامه می‌آید مثالی از یک پنج‌ضلعی محدب با دو قطر منصف را نشان می‌دهد.



■

سطح متوسط

مسائل

۱) دو دایرهٔ ω_1 و ω_2 به مراکز O_1 و O_2 در A و B متقاطع‌اند و نقطهٔ O_1 روی دایرهٔ ω_2 قرار دارد. نقطهٔ P به دلخواه روی ω_1 انتخاب شده است. خطوط BP، AP و O_1O_2 دایرهٔ ω_2 را برای بار دوم در نقاط X، Y و C قطع می‌کنند. ثابت کنید چهارضلعی $XPYC$ متوازی‌الاضلاع است.
(← ص.۱۷)

۲) همهٔ چهارضلعی‌های $ABCD$ را بیابید به‌طوری‌که هر چهار مثلث DAB، CDA، BCD و ABC با هم متشابه باشند.

(← ص.۱۹)

۳) سه دایرهٔ ω_1، ω_2 و ω_3 از یک نقطهٔ مشترک به نام P می‌گذرند. از P بر ω_1 مماسی رسم می‌کنیم تا با ω_2 و ω_3 برای بار دوم به ترتیب در نقاط $P_{1,2}$ و $P_{1,3}$ برخورد کند. به شکل مشابه نقاط $P_{2,1}$، $P_{2,3}$، $P_{3,1}$ و $P_{3,2}$ ایجاد می‌شوند. نشان دهید عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های $P_{1,2}P_{1,3}$، $P_{2,1}P_{2,3}$ و $P_{3,1}P_{3,2}$ همرس می‌باشند.

(← ص.۲۰)

۴) در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ نقطهٔ K روی خط AD قرار دارد به‌طوری‌که $BK = AB$. فرض کنید P نقطه‌ای دلخواه روی AB باشد. عمودمنصف پاره‌خط PC دایره محیطی مثلث APD را در دو نقطهٔ X و Y قطع می‌کند. ثابت کنید دایره محیطی مثلث ABK از مرکز ارتفاعی مثلث AXY می‌گذرد.

(← ص.۲۳)

۵) مثلث ABC با $\angle A = 60^\circ$ داده شده است. نقاط E و F پای نیم‌ساز رئوس B و C هستند. نقاط P و Q به‌گونه‌ای درنظر گرفته شده‌اند که دو چهارضلعی $BFPE$ و $CEQF$ متوازی‌الاضلاع باشند. ثابت کنید $\angle PAQ > 150^\circ$ (زاویهٔ PAQ که ضلع AB داخل آن نیست را در نظر بگیرید).

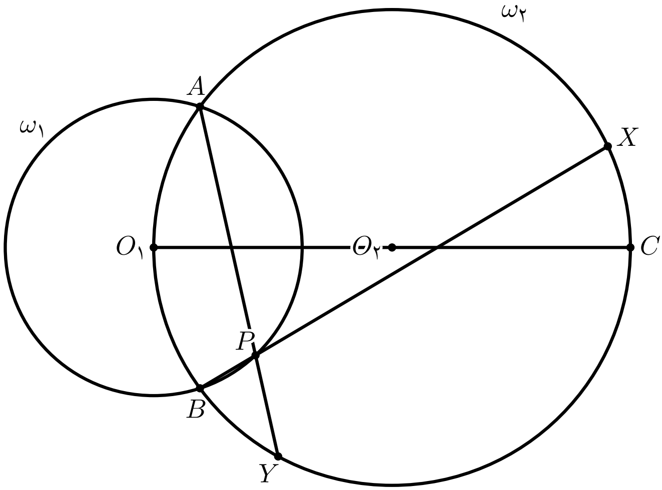
(← ص.۲۵)

راه حل‌ها

۱) دو دایرهٔ $\omega_۱$ و $\omega_۲$ به مراکز $O_۱$ و $O_۲$ در A و B متقاطع‌اند و نقطهٔ $O_۱$ روی دایرهٔ $\omega_۲$ قرار دارد. نقطهٔ P به دلخواه روی $\omega_۱$ انتخاب شده است. خطوط BP، AP و $O_۱O_۲$ دایرهٔ $\omega_۲$ را برای بار دوم در نقاط X، Y و C قطع می‌کنند. ثابت کنید چهارضلعی $XPYC$ متوازی‌الاضلاع است.

طرح شده توسط ایمان مقصودی

راه حل.



می‌توان نوشت

$$\angle APB = \frac{\widehat{AO_۱B}}{۲} + \frac{\widehat{XCY}}{۲}. \qquad (۱)$$

دقت کنید که $\angle AO_2O_1 = \angle BO_2O_1$ پس $\angle AO_1O_2 = \angle BO_1O_2$. حالا از آن‌جا که O_1 مرکز دایره محیطی APB است می‌توان نوشت

$$\angle APB = 180^\circ - \frac{\angle AO_1B}{2} = 180^\circ - \frac{\widehat{AXC}}{2} = \frac{\widehat{ABC}}{2}. \qquad (2)$$

درنهایت از دو تساوی (۱) و (۲) به‌دست می‌آید

$$\frac{\widehat{AO_1B}}{2} + \frac{\widehat{XCY}}{2} = \frac{\widehat{ABC}}{2} \Longrightarrow \widehat{XCY} = \widehat{BYC},$$

پس $CY \parallel BX$ و به‌طور مشابه $XC \parallel AY$ در نتیجه چهارضلعی $XPYC$ متوازی‌الاضلاع است و حکم نتیجه می‌شود. ■

۲) همهٔ چهارضلعی‌های $ABCD$ را بیابید به‌طوری‌که هر چهار مثلث DAB، CDA، BCD و ABC با هم متشابه باشند.

طرح شده توسط مرتضی ثقفیان

پاسخ. همهٔ مستطیل‌ها

راه حل. ابتدا فرض کنید $ABCD$ یک چهارضلعی مقعر باشد. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $\angle D > 180^\circ$ پس رأس D داخل مثلث ABC قرار دارد. از اینجا فقط از این نکته استفاده می‌شود که نقطهٔ D درون مثلث ABC قرار دارد. لذا مجدداً بدون کاسته شدن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $\angle ABC$ بزرگ‌ترین زاویه در مثلث ABC است. می‌توان نوشت

$$\angle ADC = \angle ABC + \angle BAD + \angle BCD > \angle ABC.$$

پس $\angle ADC$ از همهٔ زاویه‌های مثلث ABC بیش‌تر است و دو مثلث ABC و ADC نمی‌توانند متشابه باشند. درنتیجه در این حالت جوابی وجود ندارد.
حالا فرض کنید $ABCD$ یک چهارضلعی محدب با خاصیت مسئله باشد. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد بزرگ‌ترین زاویهٔ چهارضلعی $\angle B$ باشد. می‌توان نوشت

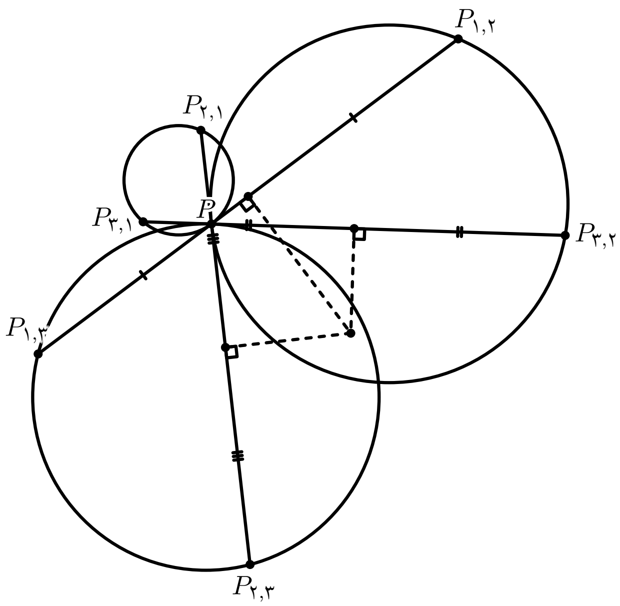
$$\angle ABC > \angle DBC, \quad \angle ABC \geq \angle ADC > \angle BDC$$

پس از آن‌جا که دو مثلث ABC و BCD مشتابه‌اند باید داشته باشیم $\angle ABC = \angle BCD$ و به همین ترتیب هر چهار زاویهٔ چهارضلعی برابر می‌شوند. درنتیجه $ABCD$ یک مستطیل است و به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که هر مستطیل شرط مسئله را داراست. ■

۳) سه دایرهٔ $\omega_{۱}$، $\omega_{۲}$ و $\omega_{۳}$ از یک نقطهٔ مشترک به نام P می‌گذرند. از P بر $\omega_{۱}$ مماسی رسم می‌کنیم تا با $\omega_{۲}$ و $\omega_{۳}$ برای بار دوم به ترتیب در نقاط $P_{۱,۲}$ و $P_{۱,۳}$ برخورد کند. به شکل مشابه نقاط $P_{۲,۱}$، $P_{۲,۳}$، $P_{۳,۱}$ و $P_{۳,۲}$ ایجاد می‌شوند. نشان دهید عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های $P_{۱,۲}P_{۱,۳}$، $P_{۲,۱}P_{۲,۳}$ و $P_{۳,۱}P_{۳,۲}$ همرس می‌باشند.

طرح شده توسط مهدی اعتصامی‌فرد

راه حل.



ابتدا فرض کنید هیچ دو خطی از بین خطوط $\ell_{۱} \equiv P_{۲,۱}P_{۳,۱}$، $\ell_{۲} \equiv P_{۱,۲}P_{۳,۲}$ و $\ell_{۳} \equiv P_{۱,۳}P_{۲,۳}$ با هم موازی نباشند. مثلث XYZ از برخورد این خطوط تشکیل شده است به‌طوری‌که

$$X \equiv \ell_{۲} \cap \ell_{۳},$$
$$Y \equiv \ell_{۱} \cap \ell_{۳},$$
$$Z \equiv \ell_{۲} \cap \ell_{۱}.$$

دقت کنید که

$$\angle P_{۳,۲}P_{۱,۲}P = \angle P_{۳,۲}PP_{۲,۳} = \angle PP_{۱,۳}P_{۲,۳}$$

در نتیجه $XP_{۱,۳} = XP_{۱,۲}$. به‌طور مشابه به‌دست می‌آید $YP_{۲,۳} = YP_{۲,۱}$ و $ZP_{۳,۱} = ZP_{۳,۲}$. پس نیم‌سازهای زوایای YXZ، XYZ و YZX همان عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های

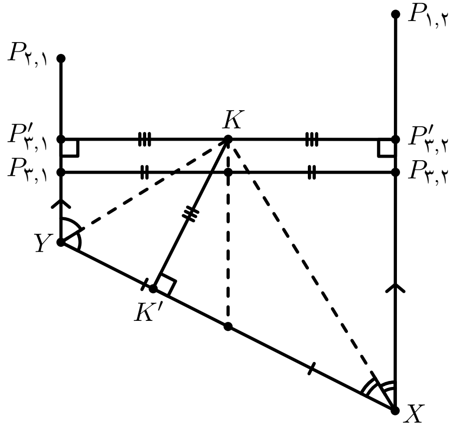
$P_{۱,۲}P_{۲}$، $P_{۲,۱}P_{۲,۳}$ و $P_{۳,۱}P_{۳,۲}$ هستند و در مرکز دایره محاطی مثلث XYZ همرس‌اند.
حالا فرض کنید حداقل دو تا از خطوط $\ell_{۱} = P_{۲,۱}P_{۳,۱}$، $\ell_{۲} = P_{۱,۲}P_{۳,۲}$ و $\ell_{۳} = P_{۱,۳}P_{۲,۳}$ موازی هستند، بدون کاسته‌شدن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $\ell_{۱}$ و $\ell_{۲}$ موازی هستند. مشابه حالت قبل

$$\angle P_{۱,۲}P_{۳,۲}P = \angle P_{۱,۲}PP_{۲,۱} = \angle P_{۲,۱}P_{۳,۱}P$$

اما بنابر $\ell_{۱} \parallel \ell_{۲}$ این هم درست است که

$$\angle P_{۱,۲}P_{۳,۲}P + \angle P_{۲,۱}P_{۳,۱}P = ۱۸۰^\circ$$

پس $\angle P_{۱,۲}P_{۳,۲}P = \angle P_{۲,۱}P_{۳,۱}P = ۹۰^\circ$. این تساوی مستقیماً نتیجه می‌دهد $\ell_{۲} \not\parallel \ell_{۳}$، زیرا در غیر این‌صورت نتیجه می‌شد $\ell_{۳} \perp P_{۱,۳}P_{۱,۲}$ و $\ell_{۲} \perp P_{۱,۳}P_{۱,۲}$، پس $P_{۳,۱}P_{۳,۲} \parallel P_{۱,۳}P_{۱,۲}$ که ممکن نیست. حالا ذوزنقهٔ $XYP_{۲,۱}P_{۱,۲}$ را درنظر بگیرید. سوال معادل با نشان دادن این است که نیم‌ساز $\angle X$، نیم‌ساز $\angle Y$ و عمودمنصف $P_{۳,۱}P_{۳,۲}$ همرس‌اند. دقت کنید که $\ell_{۱}$ و $\ell_{۲}$ با عمودمنصف $P_{۳,۱}P_{۳,۲}$ موازی‌اند، در حقیقت عمودمنصف $P_{۳,۱}P_{۳,۲}$ اوساط XY و $P_{۳,۱}P_{۳,۲}$ را به هم متصل می‌کند. حالا حکم مسئله به سادگی زیر است.



ادعا. *در ذوزنقهٔ $XYP_{۲,۱}P_{۱,۲}$ نیم‌ساز $\angle X$، نیم‌ساز $\angle Y$ و خطی که از اوساط ساق‌های ذوزنقه می‌گذرد همرس‌اند.*

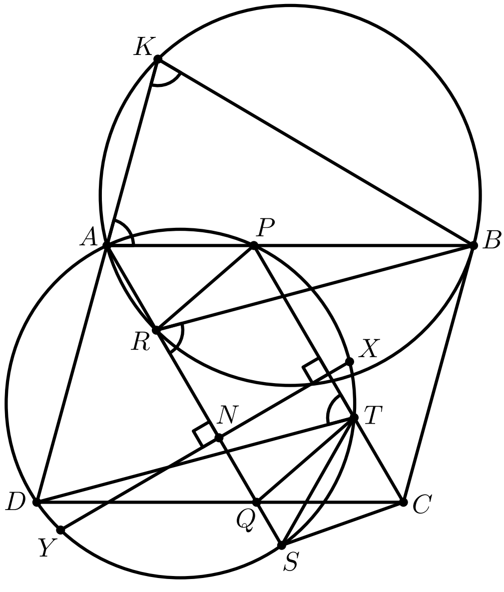
برهان. فرض کنید K محل برخورد نیم‌ساز $\angle X$ و نیم‌ساز $\angle Y$ و $P'_{۳,۲}$، $P'_{۳,۱}$ و K' به‌ترتیب پای عمودهای رسم‌شده از K بر خطوط $P_{۱,۲}X$، $P_{۲,۱}Y$ و XY باشند. از آن‌جا که K روی نیم‌ساز $\angle X$ است نتیجه می‌شود $KP'_{۳,۲} = KK'$، به‌طور مشابه از آن‌جا که K روی نیم‌ساز $\angle Y$ است نتیجه می‌شود $KP'_{۳,۱} = KK'$ پس $KP'_{۳,۱} = KP'_{۳,۲}$ یعنی K روی خطی که از اوساط ساق‌های ذوزنقه می‌گذرد قرار دارد. □

این نتیجه اثبات مسئله را کامل می‌کند. ■

۴) در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ نقطهٔ K روی خط AD قرار دارد به‌طوری‌که $BK = AB$. فرض کنید P نقطه‌ای دلخواه روی AB باشد. عمودمنصف پاره‌خط PC دایره محیطی مثلث APD را در دو نقطهٔ X و Y قطع می‌کند. ثابت کنید دایره محیطی مثلث ABK از مرکز ارتفاعی مثلث AXY می‌گذرد.

طرح شده توسط ایمان مقصودی

راه حل. فرض کنید AN ارتفاع مثلث AXY باشد و دایره محیطی مثلث ABK خط AN را برای بار دوم در R قطع کند. کافی است نشان دهیم R مرکز ارتفاعی مثلث AXY است.



فرض کنید PC و AN دایره محیطی مثلث APD را برای بار دوم در T و S قطع کنند و AN خط CD را در Q قطع کند. می‌توان نوشت

$$\angle BRS = \angle AKB = \angle KAB = \angle PTD \Longrightarrow \angle BRS = \angle PTD \qquad (۱)$$

دقت کنید که XY عمودمنصف پاره‌خط PC است پس $AN \parallel PC$. همچنین $AP \parallel CQ$ بنابراین $APCQ$ متوازی‌الاضلاع است. حالا می‌توان نوشت

$$\left.\begin{array}{l}\angle BAR = \angle TCD \\ (۱) \Longrightarrow \angle ARB = \angle CTD \\ AB = CD\end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle ARB \cong \triangle CTD \Longrightarrow CT = AR.$$

پس $PTQR$ نیز متوازی‌الاضلاع است. چهارضلعی $APTS$ یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است بنابراین
$$CQ = AP = TS.$$
درنتیجه $TQSC$ نیز یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است. نهایتاً

$$CS = TQ = PR \Longrightarrow$$ $CSRP$ یک ذوزنقه متساوی‌الساقین است.

پس S و R قرینهٔ یک‌دیگر نسبت به XY هستند و R مرکز ارتفاعی مثلث AXY است. ■

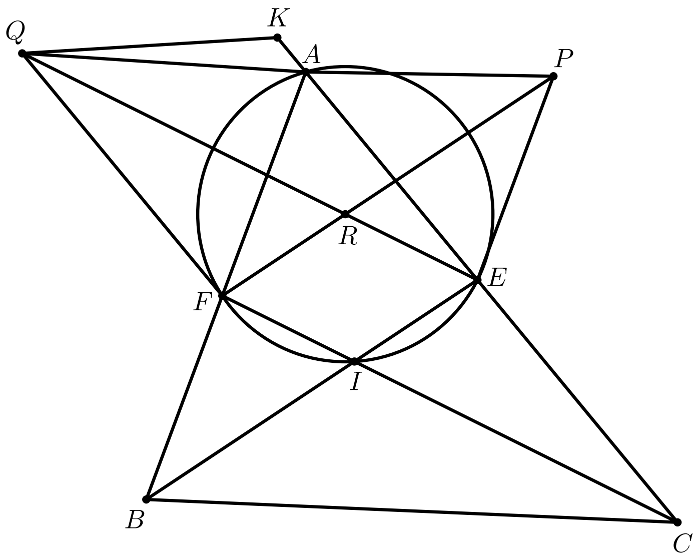
۵) مثلث ABC با $\angle A = ۶۰^\circ$ داده شده است. نقاط E و F پای نیم‌ساز رئوس B و C هستند. نقاط P و Q به‌گونه‌ای درنظر گرفته شده‌اند که دو چهارضلعی $BFPE$ و $CEQF$ متوازی‌الاضلاع باشند. ثابت کنید $\angle PAQ > ۱۵۰^\circ$ (زاویهٔ PAQ که ضلع AB داخل آن نیست را در نظر بگیرید).

طرح شده توسط علیرضا دادگرنیا

راه حل. فرض کنید خطوط BE و CF در I و خطوط QE و PF در R تقاطع داشته باشند. به‌سادگی می‌توان دید $\angle BIC = ۱۲۰^\circ$. پس چهارضلعی $AEIF$ محاطی است و می‌توان نوشت

$$CE \cdot CA = CI \cdot CF \qquad (۱)$$

هم‌چنین $\angle PRQ = \angle BIC = ۱۲۰^\circ$ پس اگر یکی از دو زاویهٔ $\angle APR$ و $\angle AQR$ بزرگ‌تر یا مساوی ۳۰° باشند حکم نتیجه می‌شود.



فرض کنید هر دو زاویه کوچک‌تر از ۳۰° باشند. درنتیجه نقطهٔ K روی امتداد CA از طرف A وجود دارد که $\angle KQE = ۳۰^\circ$. از آن‌جا که $\angle IAC = ۳۰^\circ$ و $\angle ACI = \angle KEQ$ نتیجه می‌شود $\triangle AIC \sim \triangle QKE$. پس می‌توان نوشت

$$\frac{CI}{CA} = \frac{KE}{QE} > \frac{AE}{CF} \Longrightarrow AE < \frac{CF \cdot CI}{CA} \overset{(۱)}{=} CE.$$

به‌طور مشابه نتیجه می‌شود $AF < BF$. از طرف دیگر حداقل یکی از دو زاویهٔ $\angle ABC$ و $\angle ACB$ از ۶۰° کوچک‌تر نیستند. بدون کاسته شدن از کلیت مسأله می‌توان فرض کرد $\angle ABC \geq ۶۰^\circ$ پس $BC \geq AC$ و طبق قضیهٔ نیم‌ساز به‌دست می‌آید $BF \geq AF$ که تناقض است. ■

سطح پیشرفته

مسائل

۱) دو دایرهٔ $\omega_۱$ و $\omega_۲$ در نقاط A و B متقاطع‌اند. نقطهٔ C روی مماسی که از نقطهٔ A بر دایرهٔ $\omega_۱$ رسم می‌شود درنظر گرفته شده است به‌طوری‌که $\angle ABC = ۹۰^\circ$. خط دلخواه ℓ از نقطهٔ C می‌گذرد و دایرهٔ $\omega_۲$ را در نقاط P و Q قطع می‌کند. خطوط AP و AQ دایرهٔ $\omega_۱$ را برای بار دوم به‌ترتیب در X و Z قطع می‌کنند. اگر پای عمود وارد از A بر ℓ نقطهٔ Y باشد، ثابت کنید نقاط X، Y و Z هم‌خط‌اند.

(← ص.۳۱)

۲) آیا در هر n ضلعی محدب ($n > ۳$) یک رأس و یک قطر گذرنده از این رأس پیدا می‌شود طوری‌که زاویه‌ای که این قطر با دو ضلع مجاور با رأس می‌سازد، حاده باشند؟

(← ص.۳۳)

۳) دو دایرهٔ $\omega_۱$ و $\omega_۲$ به مراکز $O_۱$ و $O_۲$ در نقاط X و Y متقاطع‌اند. خط AB مماس مشترک $\omega_۱$ و $\omega_۲$ است به‌طوری‌که نقطهٔ A روی $\omega_۱$ و نقطهٔ B روی $\omega_۲$ قرار دارد. از X بر دوایر $\omega_۱$ و $\omega_۲$ خط مماس رسم شده است تا $O_۱O_۲$ را به‌ترتیب در K و L قطع کنند. خط AK برای دومین بار دایرهٔ $\omega_۱$ را در N و خط BL برای دومین بار دایرهٔ $\omega_۲$ را در M قطع می‌کند. ثابت کنید خطوط AM، BN و $O_۱O_۲$ همرس‌اند.

(← ص.۳۴)

۴) مثلث حاده‌زاویه و مختلف‌الاضلاع ABC با دایره محیطی Γ داده شده است. نقطهٔ M وسط ضلع BC و نقطهٔ N وسط $\widehat{BC}$ از دایرهٔ Γ (کمانی که شامل A نیست) است. X و Y نقاطی روی دایرهٔ Γ هستند به‌طوری‌که $BX \parallel CY \parallel AM$. فرض کنید نقطهٔ Z روی پاره‌خط BC وجود دارد به‌طوری‌که دایره محیطی مثلث XYZ بر BC مماس است. دایره محیطی مثلث ZMN را ω بنامید. خط AM دایرهٔ ω را برای بار دوم در P قطع می‌کند و نقطهٔ K روی دایرهٔ ω قرار دارد به‌طوری‌که $KN \parallel AM$. فرض کنید ω_b دایره‌ای باشد که از نقاط B و X می‌گذرد و بر BC مماس است و ω_c دایره‌ای باشد که از نقاط C و Y می‌گذرد و بر BC مماس است. ثابت کنید دایرهٔ به مرکز K و شعاع KP بر سه دایرهٔ ω_b، ω_c و Γ مماس است.

(→ ص.۳۵)

۵) رئوس مثلث ABC روی سهمی Δ قرار دارند به‌طوری‌که مرکز ارتفاعی مثلث بر کانون سهمی منطبق است. ثابت کنید با حرکت رئوس مثلث ABC روی سهمی Δ به‌طوری‌که مرکز ارتفاعی آن ثابت بماند، شعاع دایره محاطی مثلث نیز ثابت می‌ماند.

(→ ص.۳۸)

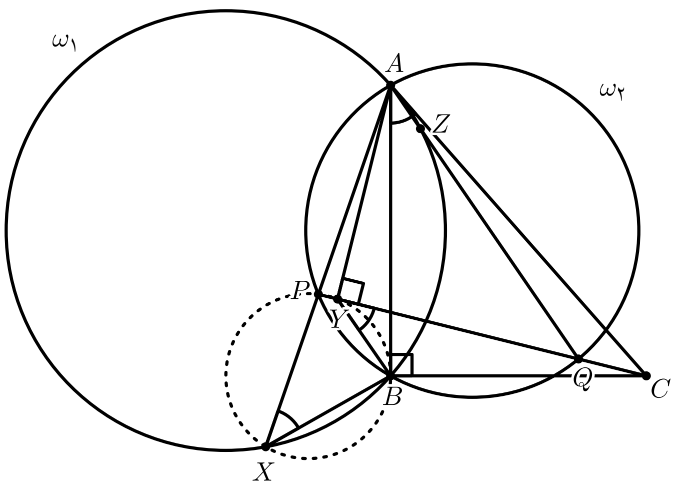
راه حل‌ها

۱) دو دایرهٔ ω_1 و ω_2 در نقاط A و B متقاطع‌اند. نقطهٔ C روی مماسی که از نقطهٔ A بر دایرهٔ ω_1 رسم می‌شود درنظر گرفته شده است به‌طوری‌که $\angle ABC = 90^\circ$. خط دلخواه ℓ از نقطهٔ C می‌گذرد و دایرهٔ ω_2 را در نقاط P و Q قطع می‌کند. خطوط AP و AQ دایرهٔ ω_1 را برای بار دوم به‌ترتیب در X و Z قطع می‌کنند. اگر پای عمود وارد از A بر ℓ نقطهٔ Y باشد، ثابت کنید نقاط X، Y و Z هم‌خط‌اند.

طرح شده توسط ایمان مقصودی

- -

راه حل.



از آن‌جا که $\angle AYC = \angle ABC = 90^\circ$ نتیجه می‌شود چهارضلعی $AYBC$ محاطی است.

درنتیجه می‌توان نوشت

$$\angle BYC = \angle BAC = \angle BXA = \angle BXP$$

پس چهارضلعی $PYBX$ محاطی است و به‌طور مشابه چهارضلعی $QBYZ$ نیز محاطی است. درنهایت می‌توان نوشت

$$\angle BYX = \angle BPX = \angle AQB = \angle ZQB = ۱۸۰^\circ - \angle ZYB$$

که هم‌خطی نقاط X، Y و Z را نتیجه می‌دهد. ■

۲) آیا در هر n ضلعی محدب $(n > ۳)$ یک رأس و یک قطر گذرنده از این رأس پیدا می‌شود طوری‌که زاویه‌ای که این قطر با دو ضلع مجاور با رأس می‌سازد، حاده باشند؟

طرح شده توسط $Boris\ Frenkin$ ـ روسیه

- -

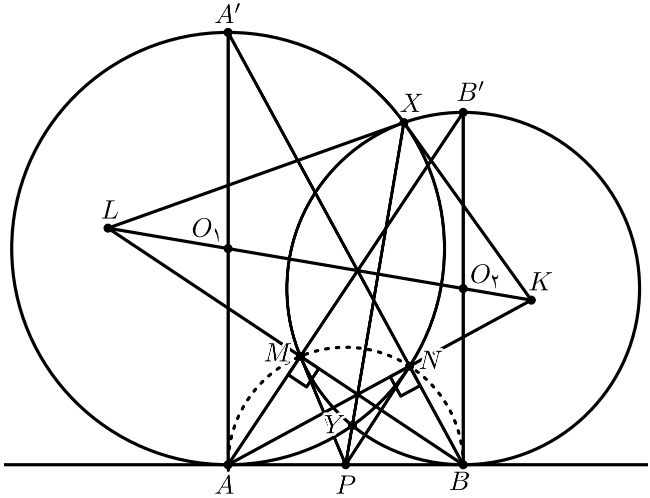
پاسخ. بله.

راه حل. فرض کنید پاسخ خیر باشد. یک n ضلعی محدب $(n > ۳)$ را درنظر بگیرید و فرض کنید AD بلندترین قطر آن باشد (اگر بلندترین قطر یکتا نبود یکی از آن‌ها را درنظر بگیرید). فرض کنید B و C رئوس مجاور A باشند. بدون کاسته‌شدن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $\angle BAD \geq ۹۰^\circ$. این یعنی $BD > AD$ پس BD قطر نیست و ضلعی از n ضلعی است. همچنین $\angle ADB < ۹۰^\circ$. فرض کنید C' راسی مجاور با D و به‌غیر از B باشد. درنتیجه $\angle ADC' \geq ۹۰^\circ$. مشابه قبل $AC' > AD$ پس AC' باید ضلعی از n ضلعی باشد و $C' \equiv C$ که نتیجه می‌دهد $n = ۴$. زوایای BAC و BDC منفرجه‌اند پس اندازهٔ طول BC از AC و BD بیش‌تر است درنتیجه $BC > AD$ که تناقض است. ■

۳) دو دایرهٔ $\omega_۱$ و $\omega_۲$ به مراکز $O_۱$ و $O_۲$ در نقاط X و Y متقاطع‌اند. خط AB مماس مشترک $\omega_۱$ و $\omega_۲$ است به‌طوری‌که نقطهٔ A روی $\omega_۱$ و نقطهٔ B روی $\omega_۲$ قرار دارد. از X بر دوایر $\omega_۱$ و $\omega_۲$ خط مماس رسم شده است تا $O_۱O_۲$ را به‌ترتیب در K و L قطع کنند. خط AK برای دومین بار دایرهٔ $\omega_۱$ را در N و خط BL برای دومین بار دایرهٔ $\omega_۲$ را در M قطع می‌کند. ثابت کنید خطوط AM، BN و $O_۱O_۲$ همرس‌اند.

طرح شده توسط Dominik Burek ـ لهستان

راه حل. فرض کنید P وسط AB باشد. از آن‌جا که قوت P نسبت به دو دایره برابر است، P روی محور اصلی دو دایره یعنی XY قرار دارد.

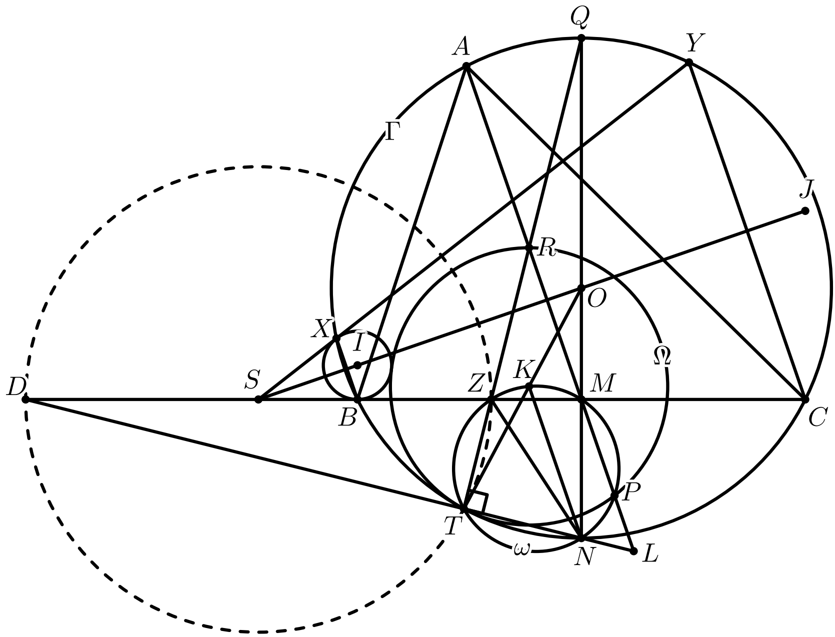


طبق تقارن KY بر $\omega_۱$ مماس است. پس XY قطبی K نسبت به $\omega_۱$ است. از آن‌جا که P روی XY قرار دارد، قطبی P نسبت به $\omega_۱$ از K می‌گذرد هم‌چنین به‌سادگی می‌توان دید که از A نیز می‌گذرد پس خط AK قطبی P نسبت به $\omega_۱$ است و PN بر این دایره مماس است. به‌طور مشابه PM نیز بر $\omega_۲$ مماس است پس چهار نقطهٔ A، B، M و N روی دایره‌ای به مرکز P قرار دارند و $\angle AMB = \angle ANB = ۹۰^\circ$. حالا اگر روبرو قطری A در $\omega_۱$ را A' و روبرو قطری B در $\omega_۲$ را B' بنامیم، خط BN از A' و خط AM از B' می‌گذرد. درنهایت دقت کنید که چهارضلعی $AA'B'B$ یک ذوزنقه است و $O_۱$ و $O_۲$ اوساط قاعده‌های آن هستند پس $A'B$، $B'A$ و $O_۱O_۲$ همرس‌اند و حکم مسئله نتیجه می‌شود. ■

۴) مثلث حاده‌زاویه و مختلف‌الاضلاع ABC با دایره محیطی Γ داده شده است. نقطهٔ M وسط ضلع BC و نقطهٔ N وسط $\widehat{BC}$ از دایرهٔ Γ (کمانی که شامل A نیست) است. X و Y نقاطی روی دایرهٔ Γ هستند به‌طوری‌که $BX \parallel CY \parallel AM$. فرض کنید نقطهٔ Z روی پاره‌خط BC وجود دارد به‌طوری‌که دایره محیطی مثلث XYZ بر BC مماس است. دایره محیطی مثلث ZMN را ω بنامید. خط AM دایرهٔ ω را برای بار دوم در P قطع می‌کند و نقطهٔ K روی دایرهٔ ω قرار دارد به‌طوری‌که $AM \parallel KN$. فرض کنید ω_b دایره‌ای باشد که از نقاط B و X می‌گذرد و بر BC مماس است و ω_c دایره‌ای باشد که از نقاط C و Y می‌گذرد و بر BC مماس است. ثابت کنید دایرهٔ به مرکز K و شعاع KP بر سه دایرهٔ ω_b، ω_c و Γ مماس است.

طرح شده توسط $Tran\ Quan$ ـ ویتنام

راه حل. فرض کنید I، J و O به ترتیب مراکز دوایر ω_b، ω_c و Γ باشند. به‌سادگی می‌توان دید که نقاط I، J و O هم‌خط‌اند. فرض کنید S محل تقاطع IJ و BC باشد. از آن‌جا که X و Y قرینهٔ B و C نسبت به IJ هستند، نتیجه می‌شود S، X و Y هم‌خط‌اند. فرض کنید T نقطه‌ای روی کمان $\widehat{BC}$ از دایرهٔ Γ (کمانی که شامل راس A نیست) باشد به‌طوری‌که ST بر دایرهٔ Γ مماس است. TZ دایرهٔ Γ را برای بار دوم در Q قطع می‌کند.



بنابر
$$ST^۲ = SX \cdot SY = SZ^۲,$$
نتیجه می‌شود ZT نیم‌ساز داخلی $\angle BTC$ است، درنتیجه Q وسط کمان $\widehat{BAC}$ از دایرهٔ Γ است.
پس $ZT \perp NT$ که نتیجه می‌دهد T روی دایرهٔ ω قرار دارد. فرض کنید R محل تقاطع AM و TQ و Ω دایره محیطی مثلث RTP باشد. از آن‌جا که

$$\angle RPT = \angle MPT = \angle SZT = \angle STR,$$

پس ST بر دایره Ω نیز مماس است و دو دایره Ω و Γ بر هم مماس‌اند. نشان می‌دهیم K مرکز دایرهٔ Ω است. حالا می‌توان نوشت

$$\begin{cases} SOMT \text{ محاطی است } \implies \angle OSM = \angle OTM \\ OS \perp AM \text{ و } MS \perp OM \implies \angle OMA = \angle OSM = \angle OTM \\ \angle OTQ = \angle OQT \end{cases}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\angle MTR = \angle OTQ + \angle OTM = \angle OQT + \angle OMA = \angle MRT,$$

پس $MR = MT$. فرض کنید L محل تقاطع AM و TN باشد. می‌توان به‌سادگی دید $\triangle RTL$ به راس T قائم‌الزاویه است پس M وسط RL است. می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} KN \parallel ML &\implies \angle MTN = \angle MLT = \angle KNT \\ &\implies KM \parallel TN \\ &\implies KM \perp RT \end{aligned}$$

پس MK عمودمنصف پاره‌خط RT است. دقت کنید که

$$\angle ZPR = \angle ZTM = \angle ZRP \implies ZR = ZP.$$

از آن‌جا که ZN قطر دایرهٔ ω است نتیجه می‌شود

$$ZK \perp KN \implies ZK \perp RP.$$

پس ZK نیز عمودمنصف پاره‌خط RP است. درنتیجه K مرکز دایرهٔ Ω است.
نهایتاً نشان می‌هیم دایرهٔ Ω بر دوایر ω_b و ω_c مماس است. فرض کنید D محل تقاطع TN و BC و (S, SZ) دایرهٔ به مرکز S و شعاع SZ باشد. از آن‌جا که TZ نیم‌ساز داخلی $\angle BTC$

است به‌دست می‌آید TD نیم‌ساز خارجی همین زاویه است که نتیجه می‌دهد $(DZ, BC) = -1$. دقت کنید که M وسط BC است پس

$$MB^2 = MZ \cdot MD,$$

که نتیجه می‌دهد M روی محور اصلی دوایر ω_b و (S, SZ) است. هم‌چنین می‌دانیم $MA \perp SI$ پس MA محور اصلی دوایر ω_b و (S, SZ) است. درنتیجه قوت R نسبت به این دو دایره برابر است. حالا انعکاس به مرکز R و شعاع

$$r = \sqrt{RZ \cdot RT},$$

دایرهٔ Ω را به $ZM \equiv BC$ و دایرهٔ ω_b را به خودش تبدیل می‌کند. پس از آن‌جا که دایرهٔ ω_b بر BC مماس است دایرهٔ ω_b بر دایرهٔ Ω نیز مماس است.
به‌طور مشابه دایرهٔ Ω بر دایرهٔ ω_c نیز مماس است و اثبات کامل می‌شود. ■

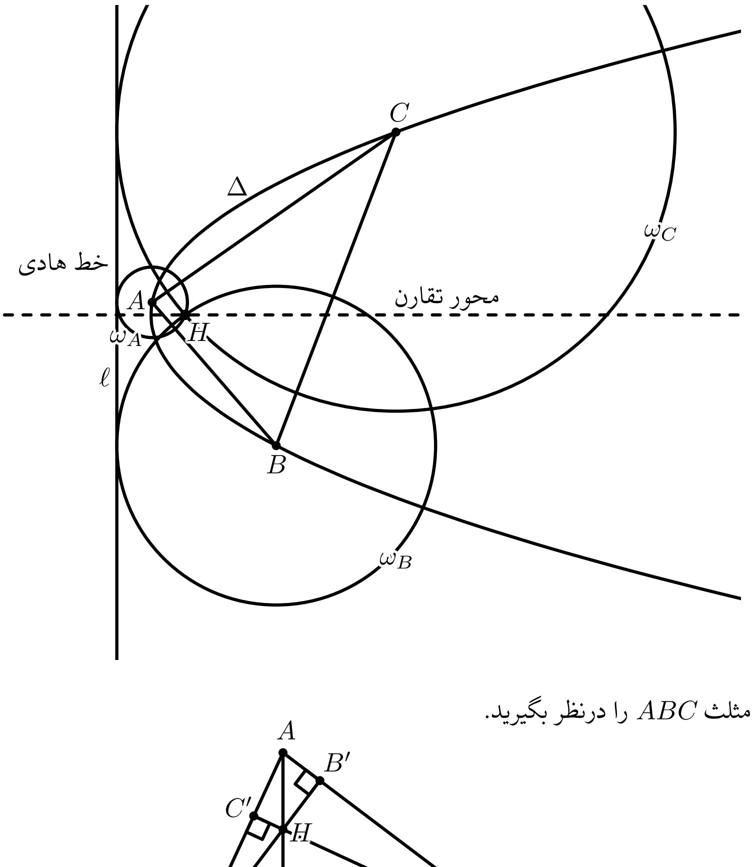
۵) رئوس مثلث ABC روی سهمی Δ قرار دارند به‌طوری‌که مرکز ارتفاعی مثلث بر کانون سهمی منطبق است. ثابت کنید با حرکت رئوس مثلث ABC روی سهمی Δ به‌طوری‌که مرکز ارتفاعی آن ثابت بماند، شعاع دایره محاطی مثلث نیز ثابت می‌ماند.

طرح شده توسط مهدی اعتصامی‌فرد

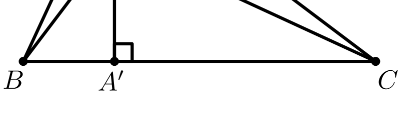
راه حل. از آن‌جا که H بر کانون سهمی Δ منطبق است دوایر

$$\omega_A = (A, AH), \omega_B = (B, BH) \text{ و } \omega_C = (C, CH)$$

بر ℓ، خط هادی Δ، مماس‌اند.



حالا مثلث ABC را درنظر بگیرید.



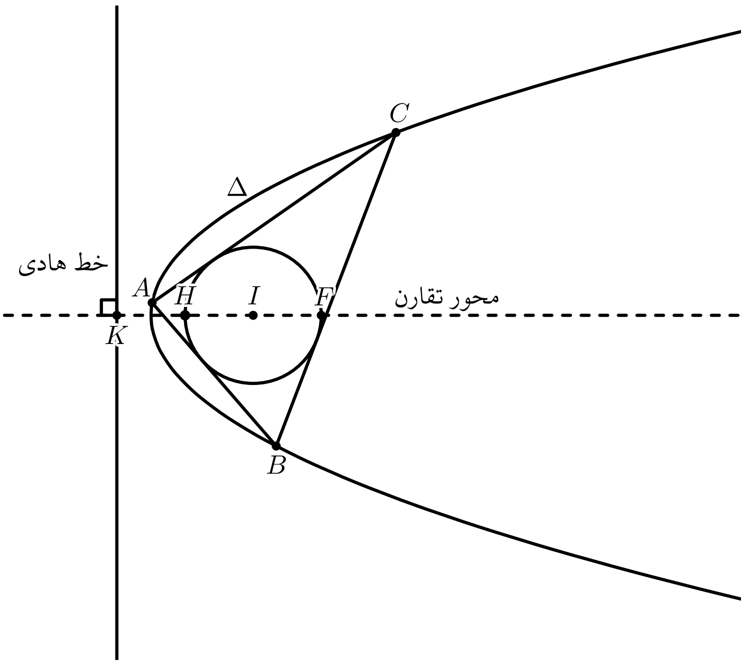
می‌دانیم

$$HA \cdot HA' = HB \cdot HB' = HC \cdot HC' = t.$$

همچنین

$$\left.\begin{array}{l} HA = ۲R\cos A \\ HA' = ۲R\cos B\cos C \end{array}\right\} \implies t = ۴R^{۲}\cos A\cos B\cos C. \qquad (۱)$$

انعکاس به مرکز H و با ضریب $-۲t$ سه دایرهٔ ω_A، ω_B و ω_C را به سه خط BC، AC و AB تبدیل می‌کند. تحت این انعکاس خط ℓ به دایره محاطی مثلث ABC تبدیل می‌شود. پس $IH \perp \ell$ و I روی محور تقارن Δ قرار دارد. همچنین H روی دایره محاطی مثلث ABC قرار دارد پس $HI = r$.



می‌دانیم اگر مرکز ارتفاعی مثلث ABC روی دایره محاطی آن باشد می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} HI^{۲} &= ۲r^{۲} - ۴R^{۲}\cos A\cos B\cos C \\ \implies r^{۲} &= ۲r^{۲} - ۴R^{۲}\cos A\cos B\cos C \\ \implies r^{۲} &= ۴R^{۲}\cos A\cos B\cos C \end{aligned}$$

بنابر (۱)، نتیجه می‌شود $HA \cdot HA' = t = r^{۲}$. تحت انعکاس نقطهٔ K به نقطهٔ F تبدیل می‌شود پس

$$\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{HF} = -۲t = -۲r^{۲} \implies HK = r.$$

که نتیجه می‌دهد شعاع دایره محاطی مثلث ABC ثابت است. ■