

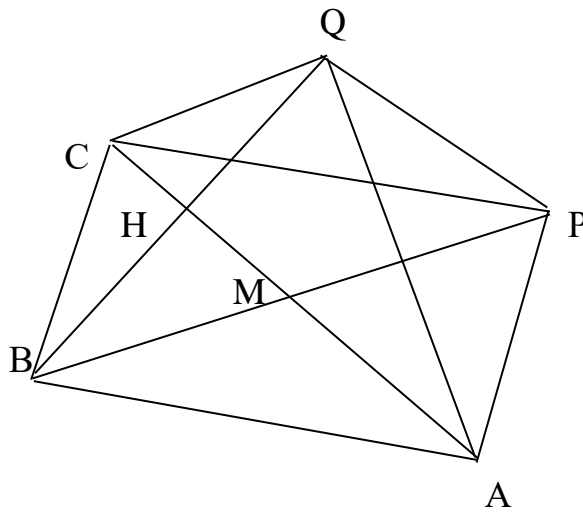
**Решение контрольной работы для поступающих в 8 класс  
ГАОУ ТО «ФМШ» в 2016 году**

1. Найдите такие натуральные числа  $x$  и  $y$  ( $x > y$ ), что выполняется равенство  $x^2 + 4y = y^2 + 4x$ .  
**Решение:** 1)  $x^2 - 4x - y^2 + 4y = 0$ ,  $x^2 - 4x + 4 - y^2 + 4y - 4 = 0$ ,  $(x - 2)^2 - (y - 2)^2 = 0$ ,  
 $(x - y)(x + y - 4) = 0$ ,  $x \neq y$ , значит,  $x + y = 4$ .  
 2) Т.к.  $x \in \mathbb{N}$ , то  $x = 3$ ,  $y = 1$  или  $x = 1$ ,  $y = 3$ .  
 3) Т.к.  $x > y$ , то  $x = 3$ ,  $y = 1$ .  
**Ответ:**  $x = 3$ ,  $y = 1$ .

2. Смешали 30%-й и 10%-й растворы соляной кислоты и получили 600 г 15%-го раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?  
**Решение:**  $\begin{cases} 0,3x + 0,1y = 0,15 \cdot 600, \\ x + y = 600; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 900, \\ x + y = 600; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 150, \\ y = 450. \end{cases}$   
**Ответ:** 30% раствора взяли 150г, а 10% - 450г.

3. Вычислите сумму  $\frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ca}$ , если известно, что  $abc=1$ .  
**Решение:** 1)  $1 + a + ab = abc + a + ab = a(bc + 1 + b) = a(bc + abc + b) = ab(c + ac + 1) = ab(c + ac + abc)$ .  
 2)  $\frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ca} = \frac{1}{ab(1+c+ca)} + \frac{1}{b(1+c+ca)} + \frac{1}{1+c+ca} = \frac{1+a+ab}{(1+c+ca)ab} = \frac{ab(1+c+ca)}{(1+c+ca)ab} = 1$ .  
**Ответ:** 1.

4. В  $\triangle ABC$  известны  $\angle BAC = 33^\circ$  и  $\angle BCA = 67^\circ$ . Из вершины  $B$  провели медиану и высоту и продолжили их за сторону  $AC$  на равные им расстояния. Получили точки  $P$  и  $Q$  соответственно. Найдите  $\angle PCQ$ .



- Решение:** 1)  $BM$  – медиана,  $BH$  – высота;  $\triangle ABC = \triangle AQC$ .  
 2)  $\triangle BCQ$  равнобедренный, т.к.  $CH$  – высота и медиана, значит,  $BC = CQ$ ; аналогично,  $BA = AQ$ .  
 3)  $\angle QCA = \angle BCA = 67^\circ$ ;  $ABCP$  – параллелограмм, т.к.  $AC$  и  $BP$  точкой пересечения делятся пополам.  
 4) Значит,  $AB \parallel CP$ ,  $\angle ACP = \angle CAB = 33^\circ$  – накрест лежащие.  
 5)  $\angle PCQ = \angle ACQ - \angle ACP = 67^\circ - 33^\circ = 34^\circ$ .  
**Ответ:**  $\angle PCQ = 34^\circ$ .

5. В жидкости плавает шар объёмом  $400 \text{ см}^3$ , погрузившись в жидкость на  $3/8$  своего объёма. Плотность жидкости в 2 раза больше плотности материала шара. Каков объём полости внутри шара?  
**Решение:** 1)  $F_A = F_{\text{Тяж.}}$ ;  $F_A = \rho_{\text{ж}} \cdot g \cdot V_{\text{п.ч.}} = \rho_{\text{ж}} \cdot g \cdot \frac{3}{8} V_m$ ;  $F_{\text{Тяж.}} = m \cdot g = \rho_m \cdot (V_m - V_{\text{пол.}}) \cdot g$ ;  
 2)  $\rho_{\text{ж}} \cdot g \cdot \frac{3}{8} V_m = \rho_m \cdot (V_m - V_{\text{пол.}}) \cdot g$ ;  $\rho_m \cdot V_{\text{пол.}} = \rho_m \cdot V_m - \rho_{\text{ж}} \cdot \frac{3}{8} V_m$ ;  $V_{\text{пол.}} = \frac{1}{4} V_m$ ;  
 $V_{\text{пол.}} = \frac{1}{4} \cdot 400 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 100 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 10^{-4} \text{ м}^3$ .  
**Ответ:**  $V_{\text{пол.}} = 10^{-4} \text{ м}^3$ .